

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Als charakteristisches Polynom ergibt sich $P(\lambda) = (a - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$ und damit die Eigenwerte $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -2$.

Wenn $a = 3$ oder $a = -2$ gilt, ergeben sich zwei Spezialfälle mit Eigenwerten von *algebraischer* Vielfachheit 2. Diese Probleme können wie gewohnt gelöst werden, indem man a in der Matrix ersetzt.

Sei also im weiteren $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

2. Eigenvektor $\vec{x}$ zu $\lambda = a$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 - a & 1 \\ 0 & 4 & -1 - a \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es muß $x_2 = x_3 = 0$ gelten, die erste Komponente ist frei wählbar. Wir setzen $x_1 = 1$.

3. Eigenvektor $\vec{y}$ zu $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} a - 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a - 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wahl von $y_3 = 1$ liefert $y_2 = 1$ und $y_1 = \frac{-2}{a-3}$ (man beachte, daß $a \neq 3$ bereits vorausgesetzt wurde).

4. Eigenvektor $\vec{z}$ zu $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} a + 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a + 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wahl von $z_3 = 4$ ergibt $z_2 = -1$. Die erste Gleichung liefert $z_1 = \frac{2}{a+2}$ (wiederum war $a \neq -2$ bereits vorausgesetzt).

5. Die drei Eigenvektoren in Abhängigkeit von a ergeben sich also zu

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -2/(a-3) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2/(a+2) \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

bzw. nach herausheben und kürzen der Quotienten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ a-3 \\ a-3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -a-2 \\ 4a+8 \end{pmatrix}$$