

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Das charakteristische Polynom lautet $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$ bzw. $-(\lambda - 2)^3 = 0$. Der einzige Eigenwert $\lambda = 2$ tritt mit *algebraischer* Vielfachheit 3 auf.
2. Die Gleichung zur Bestimmung der Eigenvektoren lautet damit

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die 3. Komponente erhalten wir also $x_3 = 0$. Die zweite Komponente ist frei wählbar, wir setzen vorteilhaft $x_2 = 2$. Damit ergibt sich aus der 1. Gleichung $x_1 = 1$. Da nur ein freier Parameter zur Verfügung steht, hat der Eigenwert $\lambda = 2$ hier die *geometrische* Vielfachheit 1.

3. Berechnung des ersten *verallgemeinerten* Eigenvektors $\vec{y}$ zu λ aus der Gleichung $(A - \lambda I)\vec{y} = \vec{x}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es ergibt sich sofort $\tilde{y}_3 = 2$. Die Wahl von $\tilde{y}_2 = 1$ ergibt $\tilde{y}_1 = 0$. Somit haben wir den ersten *verallgemeinerten* Eigenvektor $\vec{y}$ bestimmt.

4. Berechnung des zweiten *verallgemeinerten* Eigenvektors $\vec{z}$ aus der Gleichung $(A - \lambda I)\vec{z} = \vec{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die 2. Zeile erzwingt hier $\tilde{z}_3 = 1$. Wahl von $\tilde{z}_2 = 1$ ergibt $\tilde{z}_1 = 0$

5. Die drei (verallgemeinerten) Eigenvektoren lauten also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bitte beachten Sie, daß man im Falle von *verallgemeinerten* Eigenvektoren *nicht* jedes beliebige Vielfache der jeweiligen Eigenvektoren verwenden darf, da der frei wählbare Parameter t bei der Lösung der inhomogenen Gleichungen nicht einfach „herausgehoben“ werden kann!