

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Das charakteristische Polynom liefert $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$, d.h. $(2 - \lambda)^3 = 0$. Der einzige Eigenwert $\lambda = 2$ tritt mit *algebraischer* Vielfachheit 3 auf.
2. Berechnung eines Eigenvektors $\vec{x}$ zu λ durch Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x_2 und x_3 sind frei wählbar, und man kann sie durch die Parameter s und t ersetzen, was die allgemeine Lösung des Gleichungssystems liefert:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die *geometrische* Vielfachheit des Eigenwerts ist also 2. Durch geeignete Wahl von s und t kann man sofort zwei linear unabhängige Eigenvektoren ermitteln (z.B. indem man für den ersten Eigenvektor $s = 0$ und $t = 1$ wählt, und für den zweiten Eigenvektor umgekehrt $s = 1$, $t = 0$). Im Hinblick auf den noch zu berechnenden dritten - und in diesem Fall *verallgemeinerten* - Eigenvektor $\vec{z}$ müssen s und t aber so gewählt werden, daß das Gleichungssystem $(A - \lambda I)\vec{z} = \vec{x}$ lösbar bleibt (siehe 3.)! Mit $s = t = 1$ ist das der Fall. Für den zweiten Eigenvektor können wir z.B. $s = 1$ und $t = 0$ setzen. Damit erhalten wir:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Das System für den *verallgemeinerten* Eigenvektor ist also mit $\vec{x}$ lösbar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die große Wahlfreiheit zur Lösung dieser Gleichung ist für unsere Zwecke nicht von Belang, wir wählen daher die freien Variablen so einfach wie möglich, und zwar jeweils $\tilde{z}_3 = 0$ und $\tilde{z}_2 = 0$, was uns schließlich die letzte Variable $\tilde{z}_1 = -1$ liefert.

Der verallgemeinerte Eigenvektor lautet somit

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bitte beachten Sie hierbei, daß man im Falle eines *verallgemeinerten* Eigenvektors *nicht* ein beliebiges Vielfaches dieses Vektors verwenden darf!