Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Berechnung des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ als $\det(A - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = P(\lambda)$$

2. Berechnung der Nullstellen von $P(\lambda)$:

$\lambda_1 = 1$ ist direkt aus der Faktorisierung ablesbar. Der zweite Faktor liefert durch Anwendung der Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen die beiden (konjugiert komplexen) Werte $\lambda_2 = 2 + i$ und $\lambda_3 = 2 - i$

3. Berechnung eines Eigenvektors $\vec{x}$ zu λ_1 durch Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die 2. Zeile ergibt $x_3 = 0$. Die erste Zeile liefert somit $x_2 = 0$. Für die 1. Komponente gibt es keine Einschränkungen. Man kann dafür den Parameter t setzen, oder auch sofort $x_1 = 1$ wählen. Der Eigenvektor

zum Eigenwert λ_1 lautet also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Berechnung eines Eigenvektors $\vec{y}$ zu λ_2 :

$$\begin{pmatrix} -1 - i & 3 & -1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 - i & 3 & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Wahl von $y_3 = 1$ liefert $y_2 = -i$. Aus Zeile 1 erhalten wir $(-1 - i)y_1 - 3i - 1 = 0$ und daraus $y_1 = \dots = -2 - i$

5. Der Eigenvektor $\vec{z}$ zum (zu λ_2 konjugiert komplexen) Eigenwert λ_3 ergibt sich ohne weiteren Rechenaufwand als konjugiert komplexer Eigenvektor zum Vektor $\vec{y}$. Damit erhalten wir also:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 - i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} -2 + i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$