Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Berechnung des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ als $\det(A - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 4-\lambda & 6 \\ 2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda(1-\lambda)^2$$

2. Damit ergeben sich die Eigenwerte $\underline{\underline{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1.}}$

3. Berechnung eines Eigenvektors $\vec{x}$ zu λ_1 durch Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die 3. Komponente x_3 ist frei wählbar. Man kann sie durch den Parameter t ersetzen, oder vorteilhafter gleich $\underline{x_3 = 2}$ (warum?) setzen. Damit ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen in die obige Zeilenstufenform $2x_2 + 6 = 0$, also $\underline{x_2 = -3}$, sowie aus der 1. Zeile $\underline{x_1 = 0}$.

Der Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 lautet also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Der Eigenwert 1 tritt mit *algebraischer* Vielfachheit 2 auf. Die Eigenvektorgleichung liefert zunächst:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat nur noch Rang 1. Es sind somit zwei Variablen (bzw. zwei Parameter, s und t) frei wählbar. Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat damit *geometrische* Vielfachheit 2, wir können zwei (linear unabhängige) Eigenvektoren ermitteln. Am einfachsten geht das wie folgt:

(a) Wahl von $\underline{y_2 = 0}$ und $\underline{y_3 = 1}$; damit ergibt sich $\underline{y_1 = 2}$.

(b) Wahl von $\underline{y_2 = 1}$ und $\underline{y_3 = 0}$; damit ergibt sich $\underline{y_1 = 1}$.

Unter Verwendung der Zahlen aus 4.(b) für $\vec{z}$ erhalten wir also zum Eigenwert $\lambda = 1$ die zwei Eigenvektoren

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$