Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -18 & 1 & 6 \\ -9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Berechnung des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ als $\det(A - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 & 2 \\ -18 & 1-\lambda & 6 \\ -9 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 3\lambda - 2$$

2. Berechnung der Nullstellen von $P(\lambda)$:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte $\underline{\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2.}}$

3. Der Eigenwert 1 tritt mit *algebraischer* Vielfachheit 2 auf. Die Eigenvektor-Gleichung $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = 0$ lautet damit:

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -18 & 0 & 6 \\ -9 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die 3. Komponente x_3 ist frei wählbar. Man kann sie durch den Parameter t ersetzen, oder vorteilhafter gleich $\underline{x_3 = 3}$ (warum?) setzen. Die 2. Zeile liefert $\underline{x_2 = 0}$ und aus der ersten Zeile ergibt sich nun $\underline{x_1 = 1}$.

4. Da unter Punkt 3. nur *ein* Parameter t (bzw. eine Variable) frei wählbar ist, hat der Eigenwert 1 die *geometrische* Vielfachheit 1 und es ist ein *verallgemeinerter* Eigenvektor $\tilde{\vec{y}}$ zu diesem Eigenwert aus der Gleichung $(A - \lambda I)\tilde{\vec{y}} = \vec{x}$ zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 2 & 1 \\ -18 & 0 & 6 & 0 \\ -9 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die 3. Komponente $\tilde{y}_3$ ist wieder frei wählbar. Die 2. Zeile liefert $\underline{\tilde{y}_2 = 1}$ und aus der ersten Zeile ergibt sich schließlich mit geschickter Wahl von $\underline{\tilde{y}_3 = 0}$ der Wert $\underline{\tilde{y}_1 = 0}$.

5. Berechnung des Eigenvektors $\vec{z}$ zu λ_3:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -18 & 3 & 6 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wahl von $\underline{z_3 = 1}$ liefert $\underline{z_2 = -2}$ und $\underline{z_1 = 0}$.

Die drei Eigenvektoren lauten also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\vec{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$