

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 14 & 2 \\ -7 & 12 & 2 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Berechnung des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ als $\det(A - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} -9 - \lambda & 14 & 2 \\ -7 & 12 - \lambda & 2 \\ 4 & -8 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

2. Berechnung der Nullstellen von $P(\lambda)$:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$.

3. Berechnung eines Eigenvektors $\vec{x}$ zu λ_1 durch Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} -10 & 14 & 2 \\ -7 & 11 & 2 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die 3. Komponente x_3 ist frei wählbar. Man kann sie durch den Parameter t ersetzen, oder vorteilhafter gleich $x_3 = 2$ (warum?) setzen. Damit ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen in die obige Zeilenstufenform:

$$2x_2 + 2 = 0, \text{ also } \underline{x_2 = -1}, \quad \text{sowie} \quad 2x_1 + 4 - 2 = 0, \text{ also } \underline{x_1 = -1}.$$

Der Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 lautet also $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Berechnung eines Eigenvektors $\vec{y}$ zu λ_2 :

$$\begin{pmatrix} -12 & 14 & 2 \\ -7 & 9 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wahl von $y_3 = 1$ liefert $y_2 = -1$ und $y_1 = -1$

5. Berechnung eines Eigenvektors $\vec{z}$ zu λ_3 :

$$\begin{pmatrix} -7 & 14 & 2 \\ -7 & 14 & 2 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die 2. Zeile erzwingt $z_3 = 0$. Wahl von $z_2 = 1$ ergibt $z_1 = 2$

Damit haben wir die verbleibenden Eigenvektoren gefunden:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$