

B Man bestimme die Schar der *orthogonalen Trajektorien* zur Kurvenschar

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \dots \text{Scharparameter})$$

1. Durch Ableiten der Gleichung nach x erhalten wir

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha \frac{x^\alpha}{x}$$

2. Das x^α im Zähler können wir aufgrund der gegebenen Funktion sofort durch y ersetzen. Um den verbleibenden Faktor α zu eliminieren, formen wir die Ausgangs-Gleichung um:

$$\ln(y) = \alpha \ln(x) \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha = \frac{\ln(y)}{\ln(x)}}$$

3. In y' eingesetzt ergibt das die *parameterfreie* Differentialgleichung der Kurvenschar

$$y' = \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \cdot \frac{y}{x}$$

4. Die Gleichung der *orthogonalen Trajektorien* ergibt sich daraus, wenn man y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzt:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \cdot \frac{y}{x} \quad \text{bzw.} \quad \underline{y' = -\frac{x \ln(x)}{y \ln(y)}}$$

5. Lösung durch *Trennung der Variablen*:

$$y \ln(y) dy = -x \ln(x) dx$$

6. Auf beiden Seiten tritt das selbe Integral auf. Mittels *partieller Integration*

$$\int \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{x dx}_{dv} = \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

ergibt sich - umgeordnet und zusammengefaßt:

$$\int y \ln(y) dy = - \int x \ln(x) dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{4} [2 \ln(y) - 1] = -\frac{x^2}{4} [2 \ln(x) - 1] + C$$

7. Ein wenig umgeformt ergibt sich die implizite Lösung der Dgl., und damit die gesuchte Formel der orthogonalen Trajektorien mit

$$\underline{\underline{\frac{y^2}{4} [\ln(y^2) - 1] + \frac{x^2}{4} [\ln(x^2) - 1] = C}}$$

Die Gleichung läßt sich analytisch nicht nach y auflösen. Da aber die Kurven $y = x^\alpha$ leicht skizziert werden können, kann man sich ein vages Bild vom Verlauf dieser Lösungskurven - symmetrisch auf alle Quadranten fortsetzbar - konstruieren:

