$\boxed{\text{B}}$ Man bestimme die Lösung des folgenden Dgl-Systems:

$$\begin{aligned} 4x' - y' &= 16x - 3y + 12t \qquad & x(0) &= 1 \\ y' - 2x' &= 5y - 10x + 2 \qquad & y(0) &= -1 \end{aligned}$$

1. Zunächst ist das System auf die 'Standardform' zu bringen (nach x' und y' aufzulösen). Um y' zu eliminieren sind die beiden Zeilen zu addieren:

$$\begin{aligned} 4x' - 2x' &= 16x - 3y + 12t + 5y - 10x + 2 \\ 2x' &= 6x + 2y + 12t + 2 \\ \underline{x'} &= \underline{3x + y + 6t + 1} \end{aligned}$$

Wird hingegen das 2-fache der zweiten zur ersten Zeile addiert, fällt das x' weg:

$$\begin{aligned} -y' + 2y' &= 16x - 3y + 12t + 10y - 20x + 4 \\ \underline{y'} &= \underline{-4x + 7y + 12t + 4} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das System

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y + 6t + 1 \\ y' &= -4x + 7y + 12t + 4 \end{aligned}$$

2. Berechnung der Fundamentallösungsmatrix:

   (a) Eigenwerte:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(7-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

   (b) Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 5; \qquad \left.\begin{matrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \left.\begin{matrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5; \qquad \left.\begin{matrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \rightsquigarrow \left.\begin{matrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \tilde{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (c) Fundamentalmatrix:

$$\vec{x_h}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] e^{5t} \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & te^{5t} \\ 2e^{5t} & (1+2t)e^{5t} \end{pmatrix}$$

3. Variation der Konstanten:

(a) Inverse der Fundamentalmatrix:

$$\det(\Phi) = \begin{vmatrix} e^{5t} & te^{5t} \\ 2e^{5t} & (1+2t)e^{5t} \end{vmatrix} = (1+2t)e^{10t} - 2te^{10t} = e^{10t}$$

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-10t} \begin{pmatrix} (1+2t)e^{5t} & -te^{5t} \\ -2e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-5t} & -te^{-5t} \\ -2e^{-5t} & e^{-5t} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmung von $\int \Phi^{-1}(t)\vec{b}(t)\, dt$:

$$\Phi^{-1}(t)\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-5t} & -te^{-5t} \\ -2e^{-5t} & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6t+1 \\ 12t+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4t+1)e^{-5t} \\ 2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} (4\tau+1)e^{-5\tau} \\ 2e^{-5\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} -\left(\frac{4}{5}t + \frac{9}{25}\right)e^{-5t} + \frac{9}{25} \\ -\frac{2}{5}e^{-5t} + \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

(c) Allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & te^{5t} \\ 2e^{5t} & (1+2t)e^{5t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left(\frac{4}{5}t + \frac{9}{25}\right)e^{-5t} + \frac{9}{25} \\ -\frac{2}{5}e^{-5t} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right]$$

4. Bestimmung der Konstanten aus den Anfangswerten:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \vec{0} \right] \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{rcr} \to c_1 & = & 1 \\ \to c_2 & = & -3 \end{array}$$

5. Lösung:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{x}(t)}} &= \begin{pmatrix} e^{5t} & te^{5t} \\ 2e^{5t} & (1+2t)e^{5t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left(\frac{4}{5}t + \frac{9}{25}\right)e^{-5t} + \frac{9}{25} \\ -\frac{2}{5}e^{-5t} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right] \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} e^{5t} & te^{5t} \\ 2e^{5t} & (1+2t)e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{4}{5}t + \frac{9}{25}\right)e^{-5t} + \frac{34}{25} \\ -\frac{2}{5}e^{-5t} - \frac{13}{5} \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

Zusatz (ausmultiplizieren u. zusammenfassen)

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{25}\left(30t + 9 - (34 - 65t)e^{5t}\right) \\ y(t) &= -\frac{1}{25}\left(60t + 28 - (3 - 130t)e^{5t}\right) \end{aligned}$$