

B Man bestimme die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungssysteme $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

zu (a):

- Charakteristisches Polynom und Eigenwerte:

$$\mathcal{P}(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3 \implies \lambda_{1,2,3} = 2$$

- Eigenvektor(en) zu $\lambda = 2$, hom. Gleichungssystem $(A - 2I)\vec{v}_1 = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v}_1 \stackrel{\text{z.B.}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die *algebraische Vielfachheit* von $\lambda = 2$ ist drei, die *geometrische Vielfachheit* nur eins (ein frei wählbarer Parameter im Gleichungssystem, ein linear unabhängiger Eigenvektor).

- Erster *verallgemeinerter* Eigenvektor aus $(A - 2I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right. \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \vec{v}_1 \stackrel{\text{z.B.}}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Zweiter *verallgemeinerter* Eigenvektor aus $(A - 2I)\vec{v}_3 = \vec{v}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right. \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \vec{v}_1 \stackrel{\text{z.B.}}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Lösung der Gleichung und fundamentale Lösungsmatrix:

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & (2+t)e^{2t} & (3+2t+t^2/2)e^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & (3+2t)e^{2t} \\ e^{2t} & (1+t)e^{2t} & (1+t+t^2/2)e^{2t} \end{pmatrix}$$

Die Faktoren vor den Eigenvektoren entsprechen mit wachsender Anzahl genau den ersten Termen der Taylorreihe $1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$ zur Funktion e^t .

zu (b):

- Charakteristisches Polynom und Eigenwerte:

$$\mathcal{P}(\lambda) = (1 + \lambda)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) = -(1 + \lambda)^3 \implies \lambda_{1,2,3} = -1$$

- Eigenvektor(en) zu $\lambda = -1$, hom. Gleichungssystem $(A + I)\vec{v}_1 = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v}_1 \stackrel{\text{z.B.}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 \stackrel{\text{z.B.}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die *algebraische Vielfachheit* von $\lambda = -1$ ist drei, die *geometrische Vielfachheit* ist hingegen zwei (zwei frei wählbare Parameter im Gleichungssystem, zwei linear unabhängige Eigenvektoren).

Es ist also noch ein *verallgemeinerter* Eigenvektor aus dem Gleichungssystem $(A + I)\tilde{v}_3 = \vec{v}_j$ zu bestimmen, mit $j \in \{1, 2\}$.

Das Gleichungssystem ist hier allerdings nur für $j = 2$ lösbar, wobei bei der Wahl der Komponenten von $\vec{v}_2$ besonders darauf geachtet wurde, diese zusätzliche Forderung zu erfüllen!

- *Verallgemeinerter* Eigenvektor zu $\vec{v}_2$ aus $(A + I)\tilde{v}_3 = \vec{v}_2$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \vec{v}_3 \stackrel{\text{z.B.}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Lösung der Gleichung und fundamentale Lösungsmatrix:

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-t}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & (1+t)e^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} & te^{-t} \end{pmatrix}$$

B zum selberrechnen, Angabe wie oben mit

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -12 & 3 & 4 \end{pmatrix}$