$\boxed{\text{B}}$ Man führe das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = x + y - z \tag{1}$$
$$\dot{y} = x - y + z \tag{2}$$
$$\dot{z} = -x + y + z \tag{3}$$

in eine Differentialgleichung 3. Ordnung über und gebe deren Lösung an.

Es gilt, zwei Variablen zu eliminieren, z.B. y und z.

Variante 1

- Die 3. Ordnung in x erhalten wir durch wiederholtes Differenzieren von (1):

$$\ddot{x} = \dot{x} + \dot{y} - \dot{z} \tag{4}$$
$$\dddot{x} = \ddot{x} + \ddot{y} - \ddot{z} \tag{5}$$

- In (4) können die Ableitungen der Variablen y und z mittels (2) und (3) eliminiert werden:

$$\ddot{x} = \dot{x} + (x - y + z) - (-x + y + z) = \dot{x} + 2x - 2y \tag{6}$$

  Das Herausfallen von z ist hier Zufall.

- Um auch (5) substituieren zu können, sind (2) und (3) abzuleiten, und auch hier wiederum die Ableitungen von y und z gemäß (2) und (3) zu ersetzen:

$$\ddot{y} = \dot{x} - \dot{y} + \dot{z} = \dot{x} - (x - y + z) + (-x + y + z) = \dot{x} - 2x + 2y$$
$$\ddot{z} = -\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = -\dot{x} + (x - y + z) + (-x + y + z) = -\dot{x} + 2z$$

  Einsetzten in (5) ergibt

$$\dddot{x} = \ddot{x} + (\dot{x} - 2x + 2y) - (-\dot{x} + 2z) = \ddot{x} + 2\dot{x} - 2x + 2y - 2z \tag{7}$$

- In den drei Gleichungen (1), (6) und (7) kommen keine Ableitungen der „fremden“ Variablen mehr vor, und es lassen sich y und z eliminieren. Eine Möglichkeit hierfür wäre die folgende, wobei zunächst alle Terme, die x enthalten, nach links gebracht wurden:

$$\begin{array}{ccccccccccccc|c}
 & & & & \dot{x} & - & x & = & y & - & z & & (-2) \\
 & & \ddot{x} & - & \dot{x} & - & 2x & = & -2y & & & & (\pm 0) \\
\dddot{x} & - & \ddot{x} & - & 2\dot{x} & + & 2x & = & 2y & - & 2z & & (+1) \\
\hline
\dddot{x} & - & \ddot{x} & - & 4\dot{x} & + & 4x & = & 0 & & & & \Sigma
\end{array}$$

- Die Lösung dieser Gleichung lautet mit $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$ und t als unabhängiger Variable:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$$

Variante 2

- Aus Gleichung (1) wird zunächst z.B. z explizit ausgerechnet sowie dessen Ableitung bestimmt:

$$z = x + y - \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \dot{x} + \dot{y} - \ddot{x}$$

- In die Gleichungen (2) und (3) eingesetzt:

$$\dot{y} = x - y + (x + y - \dot{x}) = 2x - \dot{x} \tag{8}$$
$$\dot{x} + \dot{y} - \ddot{x} = -x + y + (x + y - \dot{x}) = 2y - \dot{x} \tag{9}$$

- Jetzt läßt sich $\dot{y}$ eliminieren, z.B. durch Einsetzen von (8) in (9):

$$\dot{x} + (2x - \dot{x}) - \ddot{x} = 2y - \dot{x}, \quad \text{also} \quad 2x - \ddot{x} = 2y - \dot{x}$$

- Auflösen nach y und wiederum Differenzieren:

$$y = \frac{2x - \ddot{x} + \dot{x}}{2}, \qquad \dot{y} = \frac{2\dot{x} - \dddot{x} + \ddot{x}}{2}$$

- Einsetzen in z.B. Gleichung (8) und umformen:

$$\frac{2\dot{x} - \dddot{x} + \ddot{x}}{2} = 2x - \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dddot{x} - \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$$

- Lösung der Dgl. wie unter Variante 1.