

B Mit geeigneten Koeffizienten a und b stellt die Funktion $y(x) = ax^b$ eine Lösung der Dgl.

$$4x^2y' - 2xy + y^2 = 4x$$

dar. Wie lautet die *allgemeine* Lösung der Dgl.?

1. Um die Dgl. auf die gewohnte Form zu bringen, dividieren wir durch $4x^2$:

$$y' - \frac{1}{2x}y + \frac{1}{4x^2}y^2 - \frac{1}{x} = 0$$

Offenbar handelt es sich um eine Riccati-Dgl. (ein Term mit y^2 , ein weiterer ohne $y \dots$).

2. Ableiten der vorgeschlagenen Lösung und Einsetzen in die Dgl. zur Bestimmung von a und b :

$$\begin{aligned} y = ax^b, \quad y' = abx^{b-1}, \quad y^2 = a^2x^{2b} &\implies abx^{b-1} - \frac{a}{2x}x^b + \frac{a^2}{4x^2}x^{2b} - \frac{1}{x} = 0 \\ &\implies 4abx^{b+1} - 2ax^{b+1} + a^2x^{2b} - 4x = 0 \end{aligned}$$

Wir benötigen x^1 , um den letzten der linken Terme auflösen zu können:

- (a) Es könnte $b = 0$ gelten; diese Wahl führt allerdings im weiteren auf einen Widerspruch.
 (b) Mit $2b = 1$ bekommen wir $b = \frac{1}{2}$. Eingesetzt liefert das:

$$2ax^{3/2} - 2ax^{3/2} + a^2x - 4x = 0, \quad \text{und somit} \quad a = \pm 2$$

Eine *partikuläre Lösung* lautet also $y(x) = 2\sqrt{x}$.

3. Der Ansatz für die *allgemeine Lösung* der Dgl. lautet - mit der neuen Variablen u :

$$y = u + 2\sqrt{x}, \quad \text{und weiters:} \quad y' = u' + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad y^2 = u^2 + 4u\sqrt{x} + 4x$$

Eingesetzt in die Dgl. aus 1. erhalten wir die neue Dgl. in x und u

$$\begin{aligned} u' + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}(u + 2\sqrt{x}) + \frac{1}{4x^2}(u^2 + 4u\sqrt{x} + 4x) - \frac{1}{x} &= 0 \\ \text{bzw.} \quad u' + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{u}{2x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{u^2}{4x^2} + \frac{u}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} &= 0 \end{aligned}$$

Zusammengefaßt und umgeformt ergibt das die *Bernoulli*-Dgl.

$$u' + u \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \right) = -\frac{u^2}{4x^2}$$

4. Die benötigte Substitution zur Lösung dieser Gleichung lautet $u = \frac{1}{z}$ und damit $u' = -\frac{z'}{z^2}$:

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \right) = -\frac{1}{4x^2z^2} \implies z' - z \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \right) = \frac{1}{4x^2}$$

5. Die so erhaltene *lineare* Dgl. lösen wir durch Einsetzen in die bekannte Formel:

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \right) dx} \cdot \left[\int \frac{1}{4x^2} e^{-\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \right) dx} dx + C \right] \\ &= \frac{e^{(-2/\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} \cdot \left[\int \frac{1}{4x\sqrt{x}} e^{(2/\sqrt{x})} dx + C \right] = \frac{4Ce^{(-2/\sqrt{x})} - 1}{4\sqrt{x}} \end{aligned}$$

6. Rückeinsetzen:

$$u(x) = \frac{4\sqrt{x}}{4Ce^{(-2/\sqrt{x})} - 1} \quad \text{und somit} \quad \underline{\underline{y(x) = \frac{4\sqrt{x}}{4Ce^{(-2/\sqrt{x})} - 1} + 2\sqrt{x}}}$$

7. Verschönerung der Lösung (nicht unbedingt notwendig):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{y(x)}} &= \frac{4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \left(4Ce^{(-2/\sqrt{x})} - 1 \right)}{4Ce^{(-2/\sqrt{x})} - 1} = 2\sqrt{x} \left(\frac{4Ce^{(-2/\sqrt{x})} + 1}{4Ce^{(-2/\sqrt{x})} - 1} \right) = \dots (\text{sub. } 4C = e^{2\tilde{C}}) \\ &\dots = 2\sqrt{x} \left(\frac{e^{(2\tilde{C}-2/\sqrt{x})} + 1}{e^{(2\tilde{C}-2/\sqrt{x})} - 1} \right) = \underline{\underline{2\sqrt{x} \coth \left(\tilde{C} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}} \end{aligned}$$