$\boxed{\text{B}}$ Man löse die Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
y_{tt} = 4y_{xx} + 8xe^{-4t} \quad \text{mit} \quad & y(0,t) = \cos^2(t) =: r_1(t) \\
& y(2,t) = e^{-4t} =: r_2(t) \\
& y(x,0) = 1 + 2x - x^2 =: f(x) \\
& y_t(x,0) = x(x-4) =: g(x)
\end{aligned}
$$

(inhomogene Wellengleichung mit inhomogenen Randbedingungen)

1. Auflösen der inhomogenen Randbedingungen.
   Ansatz: $y(x,t) = u(x,t) + v(x,t)$ mit

   (a) $\underline{\underline{u(x,t)}} := r_1(t) + \frac{x}{l}\big[r_2(t) - r_1(t)\big] = \underline{\underline{\left(1 - \frac{x}{2}\right)\cos^2 t + \frac{x}{2}e^{-4t}}}$
   (Funktion, die für jeden t-Wert die beiden Randfunktionen durch eine Gerade verbindet)

   (b) $v(x,t) := y(x,t) - u(x,t)$ und damit

$$
\begin{aligned}
v_{tt} &= 4v_{xx} + 8xe^{-4t} - u_{tt} & \text{mit} \quad & v(0,t) = v(2,t) = 0 \\
&= 4v_{xx} + (2-x)\cos 2t & & v(x,0) = f(x) - u(x,0) = x(2-x) \\
& & & v_t(x,0) = g(x) - u_t(x,0) = x(x-2)
\end{aligned}
$$

   (inhomogene Wellengleichung mit homogenen Randbedingungen)

2. Lösung der inhom. Wellengleichung.
   Ansatz: $v(x,t) = z(x,t) + w(x,t)$ mit

   (a)
$$
\begin{aligned}
z_{tt} = 4z_{xx} \quad \text{mit} \quad & z(0,t) = z(2,t) = 0 \\
& z(x,0) = x(2-x) \\
& z_t(x,0) = x(x-2)
\end{aligned}
$$

   Der Ansatz $z(x,t) = F(x) \cdot G(t)$ führt (wegen der Randbed.) auf die Darstellung

$$
\underline{\underline{z(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\pi t + B_k \sin k\pi t) \sin \frac{k\pi}{2} x}}
$$

   Einsetzen der Anfangswerte:

$$
z(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{2} x = 2x - x^2
$$

   A_k sind also die (schiefsymmetrischen) Fourier-Koeffizienten der Anfangsfunktion:

$$
\underline{\underline{A_k}} = \int_0^2 (2x - x^2) \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx = \begin{cases} \dfrac{32}{k^3\pi^3} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}
$$

   Einsetzen der Anfangs-Ableitung:

$$
z_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi B_k \sin \frac{k\pi}{2} x = x(x-2)
$$

   B_k ergeben sich damit gleichfalls als Fourier-Koeffizienten:

$$
\underline{\underline{B_k}} = \frac{1}{k\pi} \int_0^2 (x^2 - 2x) \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx = -\frac{1}{k\pi} A_k = \begin{cases} -\dfrac{32}{k^4\pi^4} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}
$$

(b) $$w_{tt} = 4w_{xx} + (2-x)\cos 2t \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} w(0,t) = w(2,t) = 0 \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0 \end{array}$$

Ansatz mit Variation der Konstanten:

$$\underline{\underline{w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin \frac{k\pi}{2} x}}$$

Ableiten und einsetzen in die Dgl:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k''(t) \sin \frac{k\pi}{2} x = -4 \sum_{k=1}^{\infty} k^2\pi^2 C_k(t) \sin \frac{k\pi}{2} x + (2-x)\cos 2t$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k''(t) + 4k^2\pi^2 C_k(t) \right] \sin \frac{k\pi}{2} x = (2-x)\cos 2t$$

Um den Koeffizientenvergleich durchführen zu können, ist die Störfunktion ebenfalls in eine Fourierreihe (bzgl. x) zu entwickeln:

$$(2-x)\cos 2t = \cos 2t \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \frac{k\pi}{2} x \quad \Leftrightarrow \quad D_k = \int_0^2 (2-x) \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx = \frac{4}{k\pi}$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k''(t) + 4k^2\pi^2 C_k(t) \right] \sin \frac{k\pi}{2} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \cos 2t \sin \frac{k\pi}{2} x$$

und daraus für jedes k eine gewöhnliche Dgl. 2. Ordnung für $C_k(t)$

$$C_k''(t) + 4k^2\pi^2 C_k(t) = \frac{4}{k\pi} \cos 2t$$

mit den Anfangswerten aus $w(x,0):\quad C_k(0) = C_k'(0) = 0$.
Die homogene Lösung lautet

$$C_{Hk}(t) = \gamma_{1k} \cos 2k\pi t + \gamma_{2k} \sin 2k\pi t$$

Weil keine äußere Resonanz vorliegt, können wir mittels einfachem Ansatz die Losungen in Abhängigkeit von k bestimmen:

$$C_{Pk}(t) = E_k \cos 2t + F_k \sin 2t \quad \dots \quad C_{Pk}''(t) = -4E_k \cos 2t - 4F_k \sin 2t$$

$$(4k^2\pi^2 - 4)E_k \cos 2t + (4k^2\pi^2 - 4)F_k \sin 2t = \frac{4}{k\pi} \cos 2t$$

$$\Rightarrow \quad C_{Pk}(t) = \frac{1}{k\pi(k^2\pi^2 - 1)} \cos 2t$$

Durch einsetzen der Anfangswerte für $C_k(t)$ in

$$C_k(t) = \gamma_{k1} \cos k\pi t + \gamma_{k2} \sin k\pi t + \frac{1}{k\pi(k^2\pi^2 - 1)} \cos 2t$$

und deren Ableitung ergeben sich

$$\gamma_{k1} = \frac{-1}{k\pi(k^2\pi^2 - 1)} \qquad \gamma_{k2} \equiv 0$$

und damit die Teillösung für $C_k(t)$:

$$\underline{\underline{C_k(t)}} = \frac{-1}{k\pi(k^2\pi^2 - 1)} (\cos k\pi t - \cos 2t)$$

3. Lösung:
   Die unterstrichenen Formelteile ergeben als $y(x,t) = u(x,t) + z(x,t) + w(x,t)$ zusammengesetzt die gesuchte Lösung der Differentialgleichung. Ihre ersten Terme lauten:

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= \left(1-\frac{x}{2}\right)\cos^2 t + \frac{x}{2}e^{-4t} \\
&+ \left(\frac{32}{\pi^3}\cos\pi t - \frac{32}{\pi^4}\sin\pi t - \frac{1}{\pi(\pi^2-1)}(\cos\pi t - \cos 2t)\right)\sin\frac{\pi}{2}x \\
&+ \left(\frac{-1}{2\pi(4\pi^2-1)}(\cos 2\pi t - \cos 2t)\right)\sin\pi x \\
&+ \left(\frac{32}{27\pi^3}\cos 3\pi t - \frac{32}{81\pi^4}\sin 3\pi t - \frac{1}{3\pi(9\pi^2-1)}(\cos 3\pi t - \cos 2t)\right)\sin\frac{3\pi}{2}x \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

4. Skizze:
   Man beachte den Anfangswert links oben sowie die Randwerte rechts hinten und links vorne!

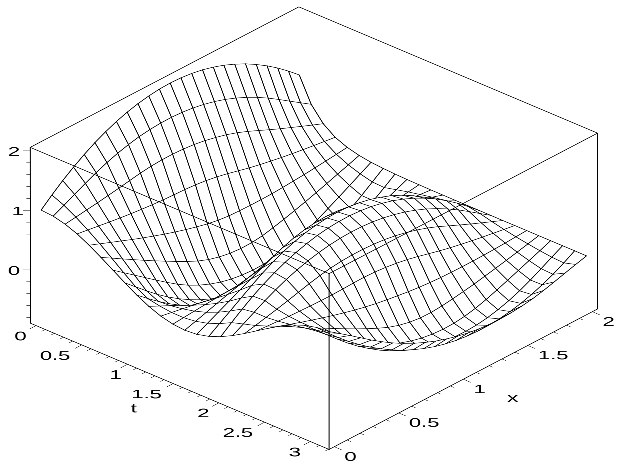

Abbildung 1: generiert unter *Maple 8* mit $k < 14$