

Fünf Spezialfälle allgemeiner partieller Dgl. 1. Ordnung:

1. $z = px + qy + f(p, q)$ (*Clairaut'sche Dgl.*)

Zur Lösung genügen die letzten beiden der *Monge'schen Dgl.*:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{ds} &= -(F_x + pF_z) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = a \\ \frac{dq}{ds} &= -(F_y + qF_z) = 0 \quad \Rightarrow \quad q = b\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}p = z_x = a \quad \Rightarrow \quad z &= ax + C_1(y) \quad \Rightarrow \quad z_y = \frac{dC_1}{dy} = q = b \quad \Rightarrow \quad C_1(y) = by + C \\ &\Rightarrow \quad z(x, y) = ax + by + C\end{aligned}$$

Einsetzen der so erhaltenen Werte in die Dgl. liefert $C = f(a, b)$ und die Lösung

$$z = ax + by + C = px + qy + f(p, q) = \underline{ax + by + f(a, b)}$$

Bsp: $z = xz_x + yz_y - z_x^2 - z_y^2$

Lösung:

$$z = ax + by - a^2 - b^2$$

Die Lösung ist eine Schar von Ebenen, und die Anforderungen an eine Anfangskurve werden hier sehr deutlich. Es genügt bereits die Angabe eines einzigen Anfangspunktes sowie einer (geeigneten) Richtungsableitung, um eine Lösungsfläche zu bestimmen:

$$z(2, 1) = 0, \quad z_x(2, 1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot 2 + b \cdot 1 - 2^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b \in \{0, 1\}$$

$$z = \underline{2x + y - 5} \quad \text{oder} \quad z = \underline{2x - 4}$$

Als *singuläre* Lösung der Dgl. ergibt sich noch die *Einhüllende* der Ebenenschar, die man erhält, indem man die geg. Dgl. partiell nach den Variablen p und q ableitet und aus den so erhaltenen Gleichungen p und q eliminiert:

$$\begin{aligned}z &= px + qy - p^2 - q^2 \\ 0 &= x - 2p \quad \Rightarrow \quad p = x/2 \\ 0 &= y - 2q \quad \Rightarrow \quad q = y/2 \\ \Rightarrow \quad z &= x^2/2 + y^2/2 - x^2/4 - y^2/4 = \underline{x^2/4 + y^2/4}\end{aligned}$$

2. $q = f(p)$:

Aus der vierten der *Monge'schen* Gleichungen, $\frac{dp}{ds} = 0$ folgt $p = a$ und in die geg. Glg. eingesetzt $q = f(a)$. Damit erhalten wir:

$$q = \frac{dz}{dy} = f(a) \Rightarrow z = f(a)y + C(x) \Rightarrow z_x = p = C'(x) = a \Rightarrow C(x) = ax + b \Rightarrow z = \underline{f(a)y + ax + b}$$

Bsp: $z_x z_y = 1$ (bzw. $z_y = \frac{1}{z_x}$)

$$\text{Lösung: } z = \underline{\frac{y}{a} + ax + b}$$

3. $F(z, p, q) = 0$

Wieder genügen die letzten beiden *Monge'schen* Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= -pF_z \\ \frac{dq}{ds} &= -qF_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \text{ bzw. } p = aq$$

Durch Elimination von p aus $F = 0$ mit $p = aq$ erhält* man eine gew. Dgl.

$$q = z_y = g(z, a) \xrightarrow{\text{T.d.V.}} \int \underbrace{\frac{dz}{g(z, a)}}_{\tilde{G}(z, a)} = \int dy = y + C(x)$$

Ableiten nach x zur Bestimmung von C :

$$\tilde{G}_x(z, a) = \frac{1}{g(z, a)} z_x = \frac{p}{g(z, a)} = \frac{p}{q} = a = C'(x) \Rightarrow C(x) = ax + b$$

Lösung:

$$\underline{\int \frac{dz}{g(z, a)} = y + ax + b}$$

Bsp.: $z_x^2 + z_y^2 = 1 + z^2$

$$(a^2 + 1)q^2 = 1 + z^2 \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1 + z^2}{a^2 + 1}} =: g(z, a)$$

Lösung:

$$\sqrt{a^2 + 1} \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \sqrt{a^2 + 1} \operatorname{arsinh} z = y + ax + b \Rightarrow \underline{z = \sinh \frac{ax + b + y}{\sqrt{a^2 + 1}}}$$

4. $q = f(y, p)$

Es genügt die 4. der *Monge'schen* Gleichungen:

$$\frac{dp}{ds} = 0 \Rightarrow p = a$$

Aus der Dgl. erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} q = f(y, a) = z_y \Rightarrow z &= \int f(y, a) dy + C(x) \Rightarrow z_x = C'(x) = p = a \Rightarrow C(x) = ax + b \\ \Rightarrow z &= \underline{ax + b + \int f(y, a) dy} \end{aligned}$$

Bsp.: $z_x z_y = y^2$ (also $z_y = \frac{y^2}{z_x}$)

Lösung:

$$z = ax + b + \underline{\int \frac{y^2}{a} dy = ax + b + \frac{y^3}{3a}}$$

*Die Auflösbarkeit der Gleichung nach q wird hier stillschweigend vorausgesetzt

5. $f(x, p) = g(y, q)$ (Trennung der Veränderlichen)
 Von den *Monge'schen* Gleichungen verwenden wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= f_p \\ \frac{dp}{ds} &= -f_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_x \frac{dx}{ds} + f_p \frac{dp}{ds} = \frac{df}{ds} = 0 \Rightarrow f(x, p) = a$$

Somit aus der geg. Dgl:

$$g(y, q) = a$$

Auflösen* der beiden Glg. nach p bzw. q :

$$\begin{aligned} z_x = p &= p(x, a) & z_y = q &= q(y, a) \\ \Rightarrow z &= \underline{\int p(x, a) dx + \int q(y, a) dy + b} \end{aligned}$$

Bsp: $(x + 4z_x)z_y^2 = \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{2}{xy} + 1$

$$\begin{aligned} (x + 4p)q^2 &= \frac{2y - x - 2 + xy}{xy} = \frac{(2 + x)(y - 1)}{xy} \\ \Rightarrow f(x, p) &= \frac{x(x + 4p)}{2 + x} = \frac{y - 1}{yq^2} = g(y, q) \\ \frac{x(x + 4p)}{2 + x} &= a \Rightarrow p = \frac{a(2 + x)}{4x} - \frac{x}{4} = \frac{a}{2x} + \frac{1}{4} - \frac{x}{4} \\ \frac{y - 1}{yq^2} &= a \Rightarrow q = \sqrt{\frac{y - 1}{ay}} \\ \Rightarrow z &= \int \left(\frac{a}{2x} + \frac{1}{4} + \frac{x}{4} \right) dx + \int \sqrt{\frac{y - 1}{ay}} dy \\ &= \underline{\underline{\frac{a}{2} \ln |x| + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \sqrt{\frac{y(y - 1)}{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arcosh} \sqrt{y} + b}} \end{aligned}$$

*Auflösbarkeit vorausgesetzt!