

Bsp. zur Lösung einer exakten Dgl. nach getrennten Variablen:

$$\text{Gleichung: } \underline{(2y + 2xy + y^2)dx + (4x + 3y)dy = 0}$$

Überprüfung liefert:

$$M_y = 2 + 2x + 2y \neq 4 = N_x \quad (\text{Gleichung ist nicht exakt!})$$

Wir suchen einen integrierenden Faktor der Form¹ $\mu = f(x) \cdot g(y) = fg$. Multiplikation der Gleichung mit diesem Faktor liefert:

$$fg(2y + 2xy + y^2)dx + fg(4x + 3y)dy = 0$$

$$M_y = fg_y(2y + 2xy + y^2) + fg(2 + 2x + 2y)$$

$$N_x = f_xg(4x + 3y) + 4fg$$

Für eine exakte Dgl. gilt $M_y = N_x$, also:

$$fg_y(2y + 2xy + y^2) + fg(2 + 2x + 2y) = f_xg(4x + 3y) + 4fg$$

Division durch fg :

$$\frac{g_y}{g}(2y + 2xy + y^2) + 2 + 2x + 2y = \frac{f_x}{f}(4x + 3y) + 4$$

Wir ersetzen die nur von x abhängende Funktion $\frac{f_x}{f}$ durch $a(x)$ und $\frac{g_y}{g}$ durch $b(y)$. Weiters fassen wir alle Terme, die entweder nur von x oder nur von y abhängen, zusammen und bringen sie auf die linke Seite:

$$(2y + y^2)b(y) + 2y - 4xa(x) + 2x = 2 + 3ya(x) - 2xyb(y)$$

An diesem Punkt beginnt die eigentliche Schwierigkeit: Wie läßt sich diese Gleichung lösen?

Im Term rechts außen tritt der Faktor xy auf, der aber links nicht vorkommt. Es bieten sich zwei Möglichkeiten:

- Der Term läßt sich durch den vorletzten Term aufheben; da in diesem Term y nur mit Potenz 1 vorkommt, muß $b(y)$ *konstant* sein: $b(y) = b_0$.
Um die Gleichung damit erfüllen zu können, kommt für den vorletzten Term nur $a(x) = a_0 + a_1x$ in Frage ($a_0, a_1 \dots$ *konstant*). Dies führt aber bereits nach wenigen Rechenschritten zur Bestimmung der Konstanten zu einem *Widerspruch*.

- Wir lassen - durch geeignete Wahl von $b(y)$ - das y im rechten Term verschwinden. Dazu muß $b(y) = \frac{b_2}{y}$ sein (b_2 *konstant*), und der ganze letzte Term hängt nur noch von x ab.
Um die Gleichung sicher erfüllen zu können, darf auch der vorletzte Term nur noch von einer Variablen abhängen, und somit muß $a(x) = a_2$ (*konstant*) sein!
Einsetzen dieser Forderungen in die Gleichung liefert:

$$(2 + y)b_2 + 2y - 4xa_2 + 2x = 2 + 3ya_2 - 2xb_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{array}{l} (x) : -4a_2 + 2 = -2b_2 \\ (y) : b_2 + 2 = 3a_2 \end{array} \right\} \Rightarrow a_2 = 1, \quad b_2 = 1$$

Damit² erhalten wir: $a(x) = 1$, $b(y) = \frac{1}{y}$ und weiters:

$$a(x) = \frac{f_x}{f} = 1 \Rightarrow \ln|f| = x \Rightarrow \underline{f(x) = e^x} \quad \text{und} \quad b(y) = \frac{g_y}{g} = \frac{1}{y} \Rightarrow \ln|g| = \ln|y| \Rightarrow \underline{g(y) = y}$$

Als integrierender Faktor ergibt sich somit $\underline{\mu(x, y) = ye^x}$. Multiplizieren wir damit die gegebene Dgl., erhalten wir die *exakte* Dgl.

$$(2y^2 + 2xy^2 + y^3)e^x dx + (4xy + 3y^2)e^x dy = 0$$

$$\text{Lösung: } \int_0^x (2y^2 + 2xy^2 + y^3)e^x dx + \int (0 + 3y^2)e^0 dy = \dots = \underline{\underline{(2xy^2 + y^3)e^x = C}}$$

¹Hinweis: Oft wird auch $X(x)$ anstelle von $f(x)$ geschrieben - wodurch die Übersichtlichkeit leidet.

²Man beachte, daß auch die Gleichung bzgl. (*konst.*): $2b_2 = 2$ erfüllt ist!