

**B** Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(9xy + 6y^2 - 1)dx + (6x^2 + 9xy - 1)dy = 0$$

1. Handelt es sich um eine exakte Dgl.?

$$M_y = 9x + 12y \quad N_x = 12x + 9y$$

Da  $M_y \neq N_x$  ist die Dgl. *nicht* exakt!

2. Bestimmung eines *integrierenden Faktors*:

(a) Faktoren  $\mu$ , die nur von einer Variablen abhängen, gibt es nicht.

(b) Faktor der Form  $\mu(x + y)$ :

$$\frac{M_y - N_x}{N - M} = \frac{9x + 12y - 12x - 9y}{6x^2 + 9xy - 1 - 9xy - 6y^2 + 1} = \frac{-3x + 3y}{6x^2 - 6y^2} = \frac{-3(x - y)}{6(x + y)(x - y)} = \frac{-1}{2(x + y)}$$

Die Funktion hängt tatsächlich nur von  $(x + y)$  ab. Damit ergäbe sich der integrierende Faktor

$$\underline{\underline{\mu(x + y)}} = \exp \left[ \int \frac{-1}{2(x + y)} d(x + y) \right] = \exp \left[ \int \frac{-1}{2u} du \right] = \exp \left[ -\frac{1}{2} \ln |u| \right] = \frac{1}{\sqrt{u}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x + y}}}}$$

(c) Faktor der Form  $\mu(xy)$ :

$$\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \dots = \frac{-3x + 3y}{-3x^2y + 3xy^2 - y + x} = \frac{-3(x - y)}{-3xy(x - y) + (x - y)} = \frac{3}{3xy - 1}$$

Die Funktion hängt jetzt nur vom Term  $xy$  ab. Als integrierender Faktor ergibt sich:

$$\underline{\underline{\mu(xy)}} = \exp \left[ \int \frac{3}{3xy - 1} d(xy) \right] = \exp \left[ \int \frac{3}{3u - 1} du \right] = \exp [\ln |3u - 1|] = \underline{\underline{3xy - 1}}$$

(d) Es gibt keinen Faktor der Form  $f(x) \cdot g(y)$ .

3. Lösen der Dgl.:

Wir wählen als *integrierenden Faktor* das  $\mu$  aus (c), da jenes aus (b) zu etwas aufwendigeren Integralen führt. Zunächst wird die Gleichung mit dem Faktor multipliziert:

$$(3xy - 1)(9xy + 6y^2 - 1)dx + (3xy - 1)(6x^2 + 9xy - 1)dy = 0$$
$$(27x^2y^2 + 18xy^3 - 12xy - 6y^2 + 1)dx + (18x^3y + 27x^2y^2 - 6x^2 - 12xy + 1)dy = 0$$

Diese Dgl. ist *exakt*. Integrieren liefert die Lösung der Dgl.:

$$\int_{\tilde{x}=0}^x (27\tilde{x}^2y^2 + 18\tilde{x}y^3 - 12\tilde{x}y - 6y^2 + 1) d\tilde{x} + \int dy = C$$

$$\underline{\underline{\frac{9x^3y^2 + 9x^2y^3 - 6x^2y - 6xy^2 + x}{2} + y = C}}$$

Wir können noch umformen:

$$9x^2y^2(x + y) - 6xy(x + y) + (x + y) = C$$

bzw.

$$\underline{\underline{(3xy - 1)^2(x + y) = C}}$$

Hinweis: Die Verwendung des  $\mu$  aus (b) als integrierenden Faktor führt auf die Lösung

$$(3xy - 1)\sqrt{x + y} = \tilde{C}$$

Mit der Wahl von  $\tilde{C} = \sqrt{C}$  liefert dies formal die selbe Lösungsmenge wie vorhin.