4. Hausübung - Musterbeispiel mit Lösung

1. Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(a) $$y''(xy'-1) = y'^2 + 1 \qquad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0$$

(b) $$ayy'' = y^2 + y'^2 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- In der Gleichung (a) fehlt y, daher Substitution $y' = p$, $y'' = p'$:

$$p'(xp-1) = p^2 + 1$$

führt auf die exakte Differentialgleichung

$$\left(p^2+1\right) dx + (1-xp)\, dp = 0$$

Integrierender Faktor:

$$\frac{M_p - N_x}{N - M} = \frac{2p+p}{\cancel{1} - xp - p^2 - \cancel{1}} = \frac{3\cancel{p}}{-\cancel{p}(x+p)} = \frac{-3}{x+p} = \nu(x+p) \quad \Longrightarrow \quad \mu(x+p) = \frac{1}{(x+p)^3}$$

- Lösung der exakten Differentialgleichung:

$$\int_0^x \frac{p^2+1}{(x+p)^3} dx + \int \frac{1-0\cdot p}{(0+p)^3} dp = \left[\frac{p^2+1}{-2(x+p)^2}\right]_0^x + \frac{1}{-2p^2} = \frac{p^2+1}{-2(x+p)^2} - \frac{p^2+1}{-2p^2} + \frac{1}{-2p^2}$$
$$= \frac{p^2+1}{-2(x+p)^2} - \frac{\cancel{p^2}}{-2\cancel{p^2}} = \tilde{C} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p^2+1}{(x+p)^2} = C_1$$

- Verwendung des Anfangswertes $p(1) = 0$ und Auflösen nach p:

$$\frac{0+1}{(1+0)^2} = 1 = C_1 \quad \Longrightarrow \quad p^2 + 1 = (x+p)^2$$

$$p^2 + 1 = x^2 + 2px + p^2 \quad \Longrightarrow \quad 2px = 1 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2}$$

- Rücksubstitution und Integration:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad y = \int \frac{1}{2x}\, dx - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$$

- Elimination von C_2:

$$y(1) = \frac{1}{2}\ln|1| - \frac{1}{4} + C_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = -\frac{3}{4}$$

- Lösung:

$$\underline{\underline{y_{(a)}(x) = \frac{2\ln x - x^2 - 3}{4}}}$$

. . . .

- In Gleichung (b) fehlt x. Substitution $y' = f(y)$, $y'' = f'(y)\cdot f(y)$:

$$ayf'f = y^2 + f^2 \quad \Longrightarrow \quad f' = \frac{y^{\cancel{2}}}{a\cancel{y}f} + \frac{f^{\cancel{2}}}{ay\cancel{f}} \quad \Longrightarrow \quad f' - \frac{1}{ay}f = \frac{y}{af}$$

Dies ist eine *Bernoulli*-Gleichung mit $\alpha = -1$.

- Erweitern mit $2f$ und Substitution $z = f^2$, $z' = 2ff'$:

$$2ff' - \frac{2}{ay}f^2 = \frac{2y}{a} \quad \Longrightarrow \quad z' - \frac{2}{ay}z = \frac{2y}{a}$$

- Allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung mit Anfangswert $z(y=1) = f^2(1) = 0$:

$$z(y) = e^{\int \frac{2}{ay} dy} \left(C_1 + \int \frac{2y}{a} e^{\int \frac{-2}{ay} dy} dy \right) = y^{2/a} \left(C_1 + \int \frac{2y}{a} y^{-2/a} \, dy \right)$$

$$= y^{2/a} \left(C_1 + \int \frac{2}{a} y^{1-2/a} \, dy \right) = y^{2/a} \left(C_1 + \frac{2}{a(2-2/a)} y^{2-2/a} \right) = C_1 y^{2/a} + \frac{1}{a-1} y^2$$

$$z(1) = C_1 + \frac{1}{a-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = \frac{-1}{a-1}$$

$$z(y) = \frac{-y^{2/a} + y^2}{a-1}$$

- Rücksubstitution:

$$f(y) = \sqrt{\frac{y^2 - y^{2/a}}{a-1}} = y' = \frac{dy}{dx}$$

- Trennung der Variablen:

$$dx = \frac{\sqrt{a-1} \, dy}{\sqrt{y^2 - y^{2/a}}} = \sqrt{a-1} \cdot \frac{dy}{y^{1/a} \sqrt{y^{2-2/a} - 1}}$$

- Integration mit Substitution $y^{1-1/a} = \cosh t$, $(1 - 1/a) y^{-1/a} dy = \sinh t dt$:

$$x + C_2 = \frac{\sqrt{a-1}}{1-1/a} \int \frac{(1-1/a) y^{-1/a} \, dy}{\sqrt{y^{2-2/a} - 1}} = \frac{a\sqrt{a-1}}{a-1} \int \frac{\sinh t \, dt}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}} = \frac{a}{\sqrt{a-1}} \int dt$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a-1}} \, t = \frac{a}{\sqrt{a-1}} \operatorname{arcosh} \left(y^{1-1/a} \right)$$

- Bestimmung der zweiten Konstante:

$$0 + C_2 = \frac{a}{\sqrt{a-1}} \overbrace{\operatorname{arcosh}(1)}^{0} \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 0$$

- Lösung:

$$x = \frac{a}{\sqrt{a-1}} \operatorname{arcosh} \left(y^{1-1/a} \right) \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\underline{y_{(b)}(x) = \left[\cosh \left(\frac{x}{a} \sqrt{a-1} \right) \right]^{\frac{a}{a-1}}}}$$

- Hinweis: Die geeignete Substitution für das Integral hängt genaugenommen vom Parameter a ab. Ist man an rein reellen Lösungen interessiert, wären Fallunterscheidungen notwendig. Z.B. ergibt sich speziell für $a = 1$ die Lösung

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

---

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 9t^2 \\ -4t^2 \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 9 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(5-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 5\lambda - 36 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36} = \begin{cases} 9 \\ -4 \end{cases}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 9$:
$$\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Eigenvektor zu $\lambda_2 = -4$:
$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Homogene Lösung, Fundamentalmatrix:

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} + c_2 \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t} \quad \Longrightarrow \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{9t} & 9e^{-4t} \\ e^{9t} & -4e^{-4t} \end{pmatrix}$$

- Inverse der Fundamentalmatrix:

$$\det(\Phi) = -13e^{5t} \qquad \Phi^{-1} = \frac{-e^{-5t}}{13} \begin{pmatrix} -4e^{-4t} & -9e^{-4t} \\ -e^{9t} & e^{9t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13}e^{-9t} & \frac{9}{13}e^{-9t} \\ \frac{1}{13}e^{4t} & -\frac{1}{13}e^{4t} \end{pmatrix}$$

- Variation der Konstanten:

$$\int \Phi^{-1}(t) \cdot \vec{b}(t) dt = \int \begin{pmatrix} \frac{4}{13}e^{-9t} & \frac{9}{13}e^{-9t} \\ \frac{1}{13}e^{4t} & -\frac{1}{13}e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9t^2 \\ -4t^2 \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 e^{4t} \end{pmatrix} dt$$
$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{8} + \frac{1}{32}\right) e^{4t} + c_2 \end{pmatrix}$$

- Lösung:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{9t} & 9e^{-4t} \\ e^{9t} & -4e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{8} + \frac{1}{32}\right) e^{4t} + c_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} c_1 e^{9t} + 9c_2 e^{-4t} + 9\left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{8} + \frac{1}{32}\right) \\ c_1 e^{9t} - 4c_2 e^{-4t} - \left(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{8}\right) \end{pmatrix}}}$$

bzw.
$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} + c_2 \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t} + \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 72t^2 - 36t + 9 \\ -32t^2 + 16t - 4 \end{pmatrix}$$