3. Hausübung - Musterbeispiel mit Lösung

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{\mathtt{IV}} + 6y'' + 9y = x^4 + 6x^2 + 9$$

mit

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 3,\ y'''(0) = 9$$

- Charakteristisches Polynom:

$$\lambda^4 + 6\lambda^2 + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda_{1\ldots4})^2 = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$$

Mit dem Verschwinden des Wertes unter der Wurzel liegt *innere Resonanz* vor, es bleiben als jeweils doppelte Wurzeln die Werte

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i\sqrt{3}, \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = -i\sqrt{3}.$$

- Homogene Lösung:

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)\cos\sqrt{3}x + (c_3 + c_4 x)\sin\sqrt{3}x$$

- Ansatz für partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} y_p &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\ y_p' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \\ y_p'' &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 \\ y_p''' &= 6a_3 + 24a_4 x \\ y_p^{\mathtt{IV}} &= 24a_4 \end{aligned}$$

Einsetzen in gegebene Gleichung:

$$24a_4 + 6(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2) + 9(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4) = x^4 + 6x^2 + 9$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rcccccccccl} x^4: & 9a_4 & & & & & & & = 1 & \Longrightarrow & a_4 = 1/9 \\ x^3: & & 9a_3 & & & & & & = 0 & \Longrightarrow & a_3 = 0 \\ x^2: & 72a_4 & & + & 9a_2 & & & & = 6 & \Longrightarrow & a_2 = -2/9 \\ x: & & 36a_3 & & & + & 9a_1 & & = 0 & \Longrightarrow & a_1 = 0 \\ \text{const.}: & 24a_4 & & + & 12a_2 & & & + \; 9a_0 & = 9 & \Longrightarrow & a_0 = 1 \end{array}$$

- Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\cos\sqrt{3}x + (c_3 + c_4 x)\sin\sqrt{3}x + 1 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{9}x^4$$

- Auswertung der Anfangswerte:

$$y(0) = c_1 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -1$$

$$y'(x) = (c_2 + c_3\sqrt{3} + c_4 x\sqrt{3})\cos\sqrt{3}x + (c_4 - c_1\sqrt{3} - c_2 x\sqrt{3})\sin\sqrt{3}x - \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}x^3$$

$$y'(0) = c_2 + c_3\sqrt{3} = 1$$

$$y''(x) = (2c_4\sqrt{3} - 3c_1 - 3c_2 x)\cos\sqrt{3}x + (-2c_2\sqrt{3} - 3c_3 - 3c_4 x)\sin\sqrt{3}x - \frac{4}{9} + \frac{4}{3}x^2$$

$$y''(0) = 2c_4\sqrt{3} - 3c_1 - \frac{4}{9} = 3 \quad \Longrightarrow \quad c_4 = \frac{2\sqrt{3}}{27}$$

$$y'''(x) = (-9c_2 - 3c_3\sqrt{3} - 3c_4 x\sqrt{3})\cos\sqrt{3}x + (-9c_4 + 3c_1\sqrt{3} + 3x_2 x\sqrt{3})\sin\sqrt{3}x + \frac{8}{3}x$$

$$y'''(0) = -9c_2 - 3c_3\sqrt{3} = 9$$

$$c_2 = -2, \qquad c_3 = \sqrt{3}$$

- Lösung:

$$y(x) = -(1+2x)\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\left(1+\frac{2}{27}x\right)\sin\sqrt{3}x + 1 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{9}x^4$$

---

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$t(t+1)\ddot{y} - 2\dot{y} + \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^2}$$

wobei mit $y_1 = t$ eine spezielle Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung gegeben sei.

- Normalform der Gleichung:

$$\ddot{y} \overbrace{-\frac{2}{t(t+1)}}^{a(t)}\dot{y} + \frac{2}{t^2(t+1)}y = \overbrace{\frac{1}{t^3(t+1)}}^{f(t)}$$

- Zweiter Anteil y_2 der *homogenen Lösung* mittels Formel „Reduktion der Ordnung“:

$$y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int a(t)dt}dt}{y_1^2} = t\int\frac{\exp\int\frac{2}{t(t+1)}dt}{t^2} = t\int\frac{\exp\int(\frac{2}{t}-\frac{2}{t+1})dt}{t^2} = t\int\frac{e^{2\ln t - 2\ln(t+1)}}{t^2}dt$$

$$= t\int\frac{1}{(t+1)^2}dt = -\frac{t}{t+1}$$

- Homogene Lösung:

$$y_h = c_1 t + c_2\frac{-t}{t+1}$$

- Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung:
  - Wronski-Determinante:

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & -\dfrac{t}{t+1} \\ 1 & -\dfrac{1}{(t+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{t^2}{(t+1)^2}$$

  - Variation der Konstanten, $y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$

$$c_1 = \int\frac{-y_2 f dt}{w} = \int\frac{\dfrac{t}{(t+1)}\cdot\dfrac{1}{t^3(t+1)}}{\dfrac{t^2}{(t+1)^2}}dt = \int\frac{1}{t^4}dt = -\frac{1}{3t^3}$$

$$c_2 = \int\frac{y_1 f dt}{w} = \int\frac{t\cdot\dfrac{1}{t^3(t+1)}}{\dfrac{t^2}{(t+1)^2}}dt = \int\frac{t+1}{t^4}dt = \int\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^4}dt = -\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{3t^3} = -\frac{3t+2}{6t^3}$$

  - Partikuläre Lösung:

$$y_p = -\frac{1}{3t^3}\cdot t - \frac{3t+2}{6t^3}\cdot\frac{-t}{(t+1)} = \frac{-2(t+1)+(3t+2)}{6t^2(t+1)} = \frac{1}{6t(t+1)}$$

- Lösung:

$$\underline{\underline{y(t) = c_1 t + c_2\frac{-t}{t+1} + \frac{1}{6t(t+1)}}} \quad \hat{=} \quad \frac{\tilde{c}_1 t^3 + \tilde{c}_2 t^2 + 1}{6t(t+1)}$$