2. Hausübung - Musterbeispiel mit Lösung

1. Berechnen Sie die *Isogonalen Trajektorien* zur Kurvenschar

$$y = \frac{\sigma}{x}$$

(Scharparameter σ), welche diese Schar unter einem Winkel von 75° schneiden. Skizzieren Sie den Verlauf von wenigstens drei der jeweiligen Kurven.

- Aufstellen der Differentialgleichung der Kurvenschar:

$$y = \frac{\sigma}{x} \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{\sigma}{x^2} \qquad \text{und} \qquad \sigma = xy \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{xy}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

- Aufstellen der Gleichung der *Isogonalen Trajektorien* mit Schnittwinkel $\theta = 75° = \frac{5\pi}{12}$ bzw. $\tan\theta = 2+\sqrt{3}$:

$$\frac{y' + 2 + \sqrt{3}}{1 - y'\left(2+\sqrt{3}\right)} = -\frac{y}{x} \qquad \text{oder direkt} \qquad y' = \frac{-\frac{y}{x} + 2 + \sqrt{3}}{1 + \frac{y}{x}\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

- Substitution $z = \frac{y}{x}$ und folglich $z'x + z = y'$:

$$z'x + z = \frac{-z + 2 + \sqrt{3}}{1 + z\left(2+\sqrt{3}\right)} \quad \Longrightarrow \quad z'x = \frac{-z + 2 + \sqrt{3} - z - z^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{1 + z\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

- Trennung der Variablen:

$$\frac{\left[1 + z\left(2+\sqrt{3}\right)\right]dz}{z^2\left(2+\sqrt{3}\right) + 2z - 2 - \sqrt{3}} = -\frac{dx}{x} \quad \overset{\int}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{2}\ln\left|z^2\left(2+\sqrt{3}\right) + 2z - 2 - \sqrt{3}\right| = -\ln x + \ln\tilde{C}$$

bzw. nach Anwendung der Exponentialfunktion:

$$\sqrt{z^2\left(2+\sqrt{3}\right) + 2z - 2 - \sqrt{3}} = \frac{\tilde{C}}{x} \quad \overset{\text{Rücksubst.}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{y^2\left(2+\sqrt{3}\right) + 2xy - x^2\left(2+\sqrt{3}\right)} = \tilde{C}$$

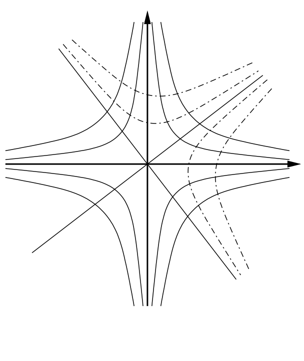
ergibt ausquadriert die gesuchte Kurvenschar

$$\underline{\underline{y^2\left(2+\sqrt{3}\right) + 2xy - x^2\left(2+\sqrt{3}\right) = C}}$$

Dies ist die Gleichung von *Hyperbeln* (wegen y^2 und $-x^2$) mit Zentrum im Ursprung (keine reinen x- oder y-Terme), die etwas gedreht sind (gemischter Term xy). Speziell ergeben sich für $C = 0$ die Gleichungen der *Asymptoten*

$$y^2 + 2xy\left(2-\sqrt{3}\right) - x^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad y_{1,2} = -x\left(2 - \sqrt{3} \pm 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \doteq \begin{cases} -1.3032x \\ 0.7673x \end{cases}$$

- Skizze:



2. Sei w jene Zahl, die sich als Kopie der letzten 3 Stellen der Matrikelnummer 8735360 ergibt. Berechnen Sie näherungsweise nach dem vereinfachten *Runge-Kutta*-Verfahren den Funktionswert von $y(0.5)$ aus dem Anfangswertproblem

$$y' = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \qquad y(0) = 1 + \frac{w}{1000}$$

mit der Schrittweite $h = 0.125$ unter tabellarischer Angabe der relevanten Zwischenwerte auf jeweils 3 Stellen nach dem Komma.

- Grunddaten:
  - Anfangswert: $y(0) = 1.360$
  - Anzahl benötigter Schritte: 4
- Relevante Daten:
  - Abszisse: x
  - Funktionswert: y
  - aktuelle Steigung: y'
  - geschätzter nächster Funktionswert: $\tilde{y}$
  - Steigung im geschätzten Punkt: $\tilde{y}'$
- Berechnungsformeln:
  - $y'_k := \left(\sqrt{x_k} - \sqrt{y_k}\right)^2$
  - $x_{k+1} := x_k + h$
  - $\tilde{y}_{k+1} := y_k + h \cdot y'_k$
  - $\tilde{y}'_{k+1} := \left(\sqrt{x_{k+1}} - \sqrt{\tilde{y}_{k+1}}\right)^2$
  - $y_{k+1} := y_k + \frac{1}{2}h\left(y'_k + \tilde{y}'_{k+1}\right)$
- Tabellarische Auswertung:

k	x_k	y_k	y'_k	$\tilde{y}_{k+1}$	$\tilde{y}'_{k+1}$	$\frac{1}{2}h\left(y'_k + \tilde{y}'_{k+1}\right)$
0	0	1.360	1.360	1.530	0.780	0.134
1	0.125	1.494	0.755	1.588	0.578	0.074
2	0.25	1.577	0.571	1.648	0.451	0.053
3	0.375	1.641	0.447	1.697	0.355	0.040
4	0.5	▷ 1.691				

- Skizze: