

### 1. Hausübung - Musterbeispiel mit Lösung

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy^3y' - y^4 = \sqrt{y^2 - x^2} \quad \text{mit } y(1) = 4$$

und bestimmen Sie auch  $y'(1)$ .

- Umformung:

$$(*) \quad y' = \frac{\sqrt{y^2 - x^2} + y^4}{xy^3} = \frac{x\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} + x^4\left(\frac{y}{x}\right)^4}{x^4\left(\frac{y}{x}\right)^3} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} + \left(\frac{y}{x}\right)^4}{\left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

- Substitution  $z = \frac{y}{x}$  bzw.  $y = zx$  und folglich  $y' = z'x + z$ :

$$z'x + z = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 \sqrt{z^2 - 1} + z^4}{z^3} \implies z'x = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{x^3 z^3}$$

- Trennung der Variablen:

$$\frac{z^3 dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{dx}{x^4} \implies \int \frac{z^3 dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x^4}$$

- Lösen der Integrale:

- Linkes Integral mittels Substitution  $z = \cosh t$  und weiters  $\sinh t = u$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{z^3 dz}{\sqrt{z^2 - 1}} &= \int \frac{\cosh^3 t \sinh t dt}{\sinh t} = \int \cosh^3 t dt = \int (\sinh^2 t + 1) \cosh t dt \\ &= \int (u^2 + 1) du = \frac{u^3}{3} + u + C_1 = \frac{\sinh^3 t}{3} + \sinh t + C_1 \\ &= \frac{1}{3} (z^2 - 1) \sqrt{z^2 - 1} + \sqrt{z^2 - 1} + C_1 = \frac{1}{3} (z^2 + 2) \sqrt{z^2 - 1} + C_1 \end{aligned}$$

Hinweis: es wäre in diesem Fall schneller gewesen, gleich  $z^2 - 1 = u^2$  zu substituieren.

- Rechtes Integral:

$$\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C_2$$

- Lösung in  $z(x)$ :

$$\frac{1}{3} (z^2 + 2) \sqrt{z^2 - 1} = -\frac{1}{3x^3} + \tilde{C}$$

- Rücksubstitution:

$$\frac{1}{3} \left[ \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2 \right] \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{3x^3} + \tilde{C} \quad \Bigg| \cdot 3x^3$$

- Allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$\underline{\underline{(y^2 + 2x^2) \sqrt{y^2 - x^2} = -1 + Cx^3}}$$

- Einsetzen des Anfangswerts,  $x = 1$ ,  $y = 4$ :

$$(16 + 2)\sqrt{16 - 1} = -1 + C \implies C = 18\sqrt{15} + 1 \doteq \underline{\underline{70.71}}$$

- Ableitung im Anfangswert durch Einsetzen von  $x$  und  $y$  in (\*):

$$y'(1) = \frac{\sqrt{16 - 1} + 64}{32} \doteq \underline{\underline{2.121}}$$

2. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{-3x}y^3$$

und überprüfen Sie, ob  $y_p(x) = \frac{e^x}{\sqrt{\cosh x}}$  ebenfalls eine Lösung dieser Gleichung ist.

---

- *Bernoulli*-Gleichung mit  $\alpha = 3$ . Substitution  $z = y^{-2}$  und damit  $z' = -2y^{-3}y'$ . Zunächst erweitern der gegebenen Gleichung mit  $-2y^{-3}$ :

$$-\frac{2y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = -e^{-3x}$$

$$z' + z = -e^{-3x}$$

- Lösung der linearen Dgl. in  $z(x)$ :

$$z(x) = e^{-\int dx} \left( C + \int -e^{-3x} e^{\int dx} dx \right) = e^{-x} \left( C + \int -e^{-3x} e^x dx \right) = e^{-x} \left( C + \frac{1}{2}e^{-2x} \right)$$

$$z(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^{-3x}$$

- Rücksubstitution, Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt{Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^{-3x}}}$$

- Betrachtung der speziellen Lösung:

◦ Ableiten:

$$y_p = \frac{e^x}{\sqrt{\cosh x}} \implies y'_p = \frac{\sqrt{\cosh x} e^x - \frac{\sinh x}{2\sqrt{\cosh x}} e^x}{\cosh x} = \frac{(2 \cosh x - \sinh x) e^x}{2 \cosh x \sqrt{\cosh x}}$$

◦ Einsetzen in die gegebene Dgl.:

$$\frac{(2 \cosh x - \sinh x) e^x}{2 \cosh x \sqrt{\cosh x}} - \frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{\cosh x}} = \frac{1}{2} e^{-3x} \frac{e^{3x}}{\cosh x \sqrt{\cosh x}} \quad \left| \cdot 2e^{-x} \cosh^{3/2} x \right.$$

$$2 \cosh x - \sinh x - \cosh x = e^{-x}$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} \quad \checkmark$$

□