$\boxed{\text{B}}$ Man bestimme die allgemeine Lösung der Dgl.

$$y' - 4y - 4 = xe^{4x} \qquad y(0) = 1$$

Hier ist eine kleine Falle eingebaut, die man beim Drüberlesen leicht übersehen kann!

1. Die Dgl. ist nicht in der *üblichen* Form gegeben, denn auf der linken Seite steht noch die Konstante! Wir erhalten also:
$$y' - 4y = \underbrace{xe^{4x}}_{f_1(x)} + \underbrace{4}_{f_2(x)}$$

2. Die Gleichung hat zwar nur Grad 1; trotzdem spricht nichts dagegen, sie mit den Konzepten zur Lösung von linearen Dgl. höherer Ordnung zu lösen. Das *char. Polynom* lautet hier - etwas ungewohnt:
$$\lambda - 4 = 0$$
Damit erhalten wir $\lambda = 4$ und als *homogene Lösung*
$$\underline{y_h = c_1 e^{4x}}$$

3. Als Ansatz für y_{p1} zu f_1 hätten wir ansich $(a_0 + a_1 x)e^{4x}$ zu wählen (da das x in f_1 ein Polynom vom Grad 1 ist). mit $a_0 = c_1$ und $a_1 = 0$ stimmt dies allerdings mit der *homogenen Lösung* überein, es kommt also zur *Resonanz*, wir müssen den Ansatz mit x multiplizieren, bis es keine Übereinstimmungen mehr geben kann - also genau einmal:
$$\begin{aligned} y_{p1} &= (a_0 x + a_1 x^2)e^{4x} \\ y'_{p1} &= (a_0 + 2a_1 x)e^{4x} + (a_0 x + a_1 x^2) \cdot 4e^{4x} = [a_0 + (2a_1 + 4a_0)x + 4a_1 x^2]e^{4x} \end{aligned}$$
Einsetzen in die Dgl. ergibt - nach Potenzen von x geordnet:
$$[a_0 + (2a_1 + 4a_0 - 4a_0)x + (4a_1 - 4a_1)x^2]e^{4x} = xe^{4x}$$

4. Koeffizientenvergleich:
$$\begin{aligned} (const \cdot e^{4x} :) \quad a_0 &= 0 \\ (xe^{4x} :) \; 2a_1 &= 1 \\ (x^2 e^{4x} :) \quad 0 &= 0 \end{aligned}$$

5. Damit erhalten wir:
$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und folglich} \quad \underline{y_{p1}(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{4x}}$$

6. Der Ansatz für y_{p2} lautet, da f_2 eine Konstante - also ein Polynom vom Grad 0 - darstellt:
$$y_{p2} = b_0 \qquad \text{und damit} \qquad y'_{p2} = 0$$
Eingesetzt in die Dgl. - mit f_2:
$$0 - 4b_0 = 4 \qquad \Rightarrow b_0 = -1 \qquad \underline{y_{p2}(x) = -1}$$
Allgemeine Lösung der Gleichung:
$$\underline{y(x)} = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = \underline{\underline{c_1 e^{4x} + \frac{1}{2}x^2 e^{4x} - 1}}$$
(Bem.: Dasselbe hätte man auch mit der Formel zur Lösung einer Dgl. erster Ordnung erhalten)

7. Mit dem Anfangswert $y(0) = 1$ erhalten wir durch Einsetzen in die Lösung:
$$1 = c_1 e^0 + 0e^0 - 1 \quad \Rightarrow c_1 = 2$$
und schlußendlich:
$$\underline{\underline{y(x) = 2e^{4x} + \frac{1}{2}x^2 e^{4x} - 1}}$$