

B Man bestimme die allgemeine Lösung der Dgl.

$$y'''' - 4y'' = 4x^2 - x^4$$

1. Das *char. Polynom* $\lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 4) = \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2)$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = 2$. Mit $\lambda = 0$ erhalten wir $ce^{\lambda t} = ce^0 = c$. Da diese Nullstelle doppelt auftritt, kommt es zur *Resonanz*, und man muß den 2. Term mit x multiplizieren ($\downarrow$). Als *homogene Lösung* erhalten wir:

$$\underline{y_h(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4e^{2x}}$$

2. Der Ansatz für die *partikuläre Lösung* würde ansich lauten: $y_p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Da aber nun - bei geeigneter Wahl der Koeffizienten - die ersten beiden Terme des Ansatzes mit den ersten beiden Termen von y_h übereinstimmen, kommt es auch hier zur *Resonanz*, und der ganze Ansatz ist so oft mit x zu multiplizieren, bis keine gleichartigen Terme mehr vorkommen - in unserem Fall also zwei mal:

$$\begin{aligned} y_p &= a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + a_3x^5 + a_4x^6 \\ y_p' &= 2a_0x + 3a_1x^2 + 4a_2x^3 + 5a_3x^4 + 6a_4x^5 \\ y_p'' &= 2a_0 + 6a_1x + 12a_2x^2 + 20a_3x^3 + 30a_4x^4 \\ y_p''' &= 6a_1 + 24a_2x + 60a_3x^2 + 120a_4x^3 \\ y_p'''' &= 24a_2 + 120a_3x + 360a_4x^2 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt - nach Potenzen von x geordnet:

$$(24a_2 - 8a_0) + (120a_3 - 24a_1)x + (360a_4 - 48a_2)x^2 - 80a_3x^3 - 120a_4x^4 = 4x^2 - x^4$$

3. Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} (const:) \quad 24a_2 - 8a_0 &= 0 \\ (x:) \quad 120a_3 - 24a_1 &= 0 \\ (x^2:) \quad 360a_4 - 48a_2 &= 4 \\ (x^3:) \quad -80a_3 &= 0 \Rightarrow a_3 = 0 \\ (x^4:) \quad -120a_4 &= -1 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

Weiters erhalten wir daraus:

$$a_2 = \frac{4 - 360a_4}{-48} = -\frac{1}{48}, \quad a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_0 = 3a_2 = -\frac{1}{16}$$

$$\underline{y_p(x) = -\frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{120}}$$

4. Allgemeine Lösung der Gleichung:

$$\underline{\underline{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4e^{2x} - \frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{120}}}$$