

B Man bestimme die allgemeine Lösung der Dgl.

$$x''' - 3x'' + 7x' - 5x = \underbrace{4e^{2t}}_{f_1(t)} + \underbrace{2t}_{f_2(t)}$$

1. Das *char. Polynom* $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5$ hat eine Nullstelle $\lambda_1 = 1$.

$$\text{Polynomdivision: } (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

$$\text{Daraus ergeben sich die weiteren Nullstellen } \underline{\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm 2i}$$

2. Somit erhalten wir als *homogene Lösung*:

$$\underline{x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^t \cos 2t + c_3 e^t \sin 2t}$$

(man beachte, daß e^t und $e^t \cos 2t$ zwei grundverschiedene Terme sind - also keine Resonanz!)

3. Der Ansatz für f_1 lautet $x_{p1}(t) = Ae^{2t}$. Ableiten liefert:

$$\begin{aligned} x_{p1} &= Ae^{2t} \\ x'_{p1} &= 2Ae^{2t} \\ x''_{p1} &= 4Ae^{2t} \\ x'''_{p1} &= 8Ae^{2t} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. - mit $f_1(t)$ - ergibt:

$$8Ae^{2t} - 12Ae^{2t} + 14Ae^{2t} - 5e^{2t} = 4e^{2t} \Rightarrow 5A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{5} \Rightarrow \underline{x_{p1}(t) = \frac{4}{5}e^{2t}}$$

4. Der Ansatz für f_2 (Polynom vom Grad 1) lautet $x_{p2}(t) = a_0 + a_1 t$. Ableiten liefert:

$$\begin{aligned} x_{p2} &= a_0 + a_1 t \\ x'_{p2} &= a_1 \\ x''_{p2} &= 0 \\ x'''_{p2} &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. - mit $f_2(t)$ - ergibt:

$$7a_1 - 5(a_0 + a_1 t) = 2t$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} (\text{const :}) \quad 7a_1 - 5a_0 &= 0 \\ (t :) \quad -5a_1 &= 2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$a_1 = -\frac{2}{5} \quad \text{und} \quad a_0 = -\frac{14}{25} \quad \text{und somit} \quad \underline{x_{p2}(t) = -\frac{14}{25} - \frac{2}{5}t}$$

5. Allgemeine Lösung der Gleichung:

$$\underline{\underline{x(t) = x_h(t) + x_{p1}(t) + x_{p2}(t) = c_1 e^t + c_2 e^t \cos 2t + c_3 e^t \sin 2t + \frac{4}{5}e^{2t} - \frac{14}{25} - \frac{2}{5}t}}$$