

B Die Matrix A wäre auf Diagonalform zu bringen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Berechnung der Eigenwerte von A :

(a) Charakteristisches Polynom:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \underline{-\lambda^3 + 8\lambda^2 + 4\lambda - 32}$$

(b) Nullstellen:

- $\lambda_1 = 2$ durch Ausprobieren der Teiler von 32.
- Polynomdivision: $(\lambda^3 - 8\lambda^2 - 4\lambda + 32) \div (\lambda - 2) = \lambda^2 - 6\lambda - 16$
 $\Rightarrow \lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9+16}$, also $\lambda_2 = 8$ und $\lambda_3 = -2$

2. Berechnung der Eigenvektoren der Matrix A

(a) zu $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) zu $\lambda_2 = 8$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) zu $\lambda_3 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da alle Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1 haben, bilden die Eigenvektoren ein Orthonormalsystem.

3. Anschreiben der Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad T^{-1} = T^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

4. Resultat:

$$\underline{\underline{T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D}}$$