89. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$$

Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $f$ und entscheiden Sie welche davon lokale Minima bzw. Maxima sind. Erstellen Sie ferner einen Flächen- und einen Höhenlinienplot von $f$ mittels Matlab oder eines anderen Ihnen für diesen Zweck geeignet erscheinenden Programmpakets.

90. Gegeben sei die sogenannte Rosenbrock Funktion (eine beliebte Testfunktion für Lösungsverfahren für unrestringierte Optimierungsprobleme)

$$f(x_1, x_2) := 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Bestimmen Sie alle stationären Punkte und entscheiden Sie welche davon lokale Minima bzw. Maxima sind.

91. Bestimmen Sie alle stationäne Punkte der folgenden Funktionen und entscheiden Sie welche davon lokale Extrema sind:

   (a) $f(x_1, x_2) := 1/2x_1^2 + x_1 \sin x_2$

   (b) $f(x_1, x_2) := 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$

92. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 \cos x_2.$$

   (a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte. Welche davon entsprechen lokalen Minima bzw. lokalen Maxima?

   (b) Handelt es sich beim Ursprung um ein lokales Minimum? Falls nicht, finden Sie eine Richtung $d$ entlang der $f$ abnimmt.

   (c) Minimieren Sie $f$ ausgehend vom Ursprung entlang der Richtung $d$, die Sie in (b) gewählt haben.

93. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ so dass für $\alpha = 0$ alle Funktionen $g(\alpha) := f(x^* + \alpha d)$ mit $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ beliebig ein lokales Minimum annehmen.

   (a) Zeigen Sie, dass $\nabla f(x^*) = 0$.

   (b) Zeigen Sie, dass die obige Bedingung nicht impliziert, dass $f$ in $x^*$ ein lokales Minimum annimmt. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f$ mit $f(x_1, x_2) := (x_2 - ux_1^2)(x_2 - vx_1^2)$ mit $0 < u < v$.)

94. Bezeichne $P_n(0, 1)$ die Menge der Polynome vom Grad $n$ auf dem Intervall $(0, 1)$. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für den Koeffizientenvektor $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ des Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ an, das die Funktion

$$f(a) = \int_0^1 |p(x) - g(x)|^2 dx$$

minimiert für eine gegebene Funktion $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

95. $A$ eine eine $m \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$ mit Rang $n$. Ferner sei $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Zeigen Sie, dass das vorzeichenbeschränkte lineare Ausgleichsproblem

$$\min h(x) = ||Ax - b||_2$$

auf $M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ eindeutig lösbar ist. Betrachten Sie dazu das äquivalente Optimierungsproblem, das $h^2$ über $M$ minimiert.

96. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Der Epigraph von $f$ ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$$

Zeigen Sie, dass $f$ eine konvexe Funktion ist genau dann wenn $\mathrm{Epi}(f)$ eine konvexe Menge im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

97. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f : X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

    (a) $f$ ist gleichmässig konvex (auf $X$) mit Modulus $\mu > 0$.

    (b) Die durch $g(x) := f(x) - \mu ||x||^2$ definierte Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ ist konvex (auf $X$).

98. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und nicht-leer wird quasikonvex genannt, wenn

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \qquad \text{für alle } x, y \in X, \lambda \in [0, 1]$$

gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

    (a) Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und nicht-leer ist quasikonvex genau dann wenn $X_\alpha := \{\, x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ eine konvexe Menge für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

    (b) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Ferner sei $f$ differenzierbar. Zeigen Sie dass $f$ quasikonvex ist genau dann wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

        - Wenn $x, y \in X$ und $f(x) \leq f(y)$, dann gilt $\nabla f(y)^t (x - y) \leq 0$.
        - Wenn $x, y \in X$ und $\nabla f(y)^t (x - y) > 0$, dann gilt $f(x) > f(y)$.

    (c) Verwenden Sie das Resultat aus (b), um zu entscheiden ob $f(x) = x^3$ quasikonvex ist.

    (d) Verwenden Sie das Resultat aus (b), um zu entscheiden ob $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ quasikonvex ist. Was schliessen Sie aus dem Ergebnis?

99. Eine quasikonvexe Funktion heisst strikt quasikonvex, wenn die Ungleichung in der Definition der Quasikonvexität für alle $x, y \in X$ mit $f(x) \neq f(y)$ und für alle $\lambda \in (0, 1)$ strikt erfüllt ist.

    Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt quasikonvex und sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und nicht-leer. Betrachten Sie das Problem $\min f(x)$ unter $x \in X$. Zeigen Sie, dass ein lokales Minimum $\bar{x}$ von $f$ auch ein globales Minimum von $f$ darstellt.

100. Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Die Funktion $f$ wird pseudokonvex (auf $X$) genannt, wenn

$$\nabla f(y)^t (x - y) \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \geq f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

    (a) Veranschaulichen Sie sich diese Definition im Fall $n = 1$.

    (b) Geben Sie Beispiele für pseudokonvexe Funktionen an, die nicht konvex sind.

    (c) Zeigen Sie, dass eine stetig differenzierbare, konvexe Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X$ konvex auf $X$ pseudokonvex ist.

(d) Zeigen Sie, dass ein stationärer Punkt $x^*$ einer pseudokonvexen Funktion $f$ ein globales Minimum für $f$ darstellt.

101. Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex sodass

$$b^t x + \beta \neq 0 \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Betrachten Sie die rationale Funktion $f$ definiert durch

$$f(x) := \frac{a^t x + \alpha}{b^t x + \beta}.$$

Zeigen Sie dass $f$ pseudokonvex, aber i.a. nicht konvex ist.

102. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$. Angenommen wir starten das generische Abstiegsverfahren aus der Vorlesung mit $x_0 := -3$ und wählen in der $k$-ten Iteration als Abstiegsrichtung $d_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und als Schrittweite $t_k = 2^{-k}$.

(a) Weisen Sie nach, dass $d_k$ in der Tat eine Abstiegsrichtung ist.

(b) Welche Folge ergibt sich für die $x_k$ und welche für $f(x_k)$?

(c) Konvergiert das Verfahren? Wenn ja, gegen welchen Punkt?

(d) Funktioniert das Verfahren korrekt? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?

103. Gegeben sei die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{1}{2} x^t Q x + c^t x + \gamma$$

wobei $Q$ ist eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$ ist, die symmetrisch und positiv definit ist und $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Seien ferner $x \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}^n$ sodass $\nabla f(x)^t d < 0$. Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:

(a) Die Schrittweite

$$t_{\min} := -\frac{\nabla f(x)^t d}{d^t Q d}$$

liefert den stärksten Abstieg von $f$ entlang der Richtung $d$, d.h. es ist

$$f(x + t_{\min} d) \leq f(x + td) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für $t \neq t_{\min}$ gilt sogar die strikte Ungleichung.

(b) Es existiert eine von $x$ und $d$ unabhängige Konstante $\theta > 0$ mit

$$f(x + t_{\min} d) \leq f(x) - \theta \left( \frac{\nabla f(x)^t d}{||d|||} \right)^2,$$

d.h., die Schrittweite $t_{\min}$ ist effizient.

104. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\{x^k\}$ die durch das generische Abstiegsverfahren erzeugte Folge derart dass die Suchrichtungen $d^k$ die Winkelbedingung erfüllen, die Schrittweiten $t_k$ effizient sind und ferner $\lim_{k \to \infty} ||x^{k+1} - x^k|| = 0$ gelte.

Zeigen Sie, dass wenn die Niveaumenge $\mathcal{L}(x^0)$ kompakt ist und $f$ nur endlich viele stationäre Punkte in dieser Menge besitzt, die Folge $\{x^k\}$ gegen einen dieser stationären Punkte konvergiert.

105. Was spricht dafür die Winkelbedingung

$$-\frac{\nabla f(x^k)^t d^k}{||\nabla f(x^k)||||d^k||} \geq c > 0$$

und nicht die einfachere Bedingung

$$-\nabla f(x^k)^t d^k \geq c > 0$$

heranzuziehen, um einen hinreichenden Fortschritt in Abstiegsverfahren zu gewährleisten?