30. Betrachten Sie das lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Stellen Sie den zulässigen Bereich des Problem in $\mathbb{R}^2$ geometrisch dar. Bestimmen Sie alle Basen und geben Sie für jede Basis an, ob sie zulässig bzw. entartet ist. Bestimmen Sie zu jeder Basis die dazugehörige Basislösung und geben Sie ggf. die dazugehörige Ecke des Polyeders der zulässigen Lösungen in $\mathbb{R}^2$ an.

31. Das untenstehende Tableau ergab sich als Zwischenstufe bei der Lösung von $\min c^t x$ (Achtung: nicht max) unter $Ax = b, x \geq 0$ mit Hilfe der Simplexmethode.

		x_2	x_3	x_5
	8	8/3	-11	4/3
x_1	4	-2/3	0	-4/3
x_4	2	7/3	-3	2/3
x_6	2	2/3	2	-2/3

$B = (1, 4, 6)$ ist die augenblickliche Basis (Indizierung in dieser Reihenfolge).

(a) Drücken Sie die augenblicklichen abhängigen Variablen, die Zielfunktion und die Nebenbedingungen durch die augenblicklichen unabhängigen Variablen aus.

(b) Welche Pivotoperation muß als nächstes folgen?

(c) Rekonstruieren Sie das ursprüngliche Problem, falls folgendes noch bekannt ist:

$$c_1 = 1 \qquad c_4 = 3 \qquad A_B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

32. Die Koeffizientenmatrix A und der rechte Seiten Vektor b eines linearen Programms seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zunächst die Basislösung, die der Basis $B = \{1, 2, 3\}$ entspricht. Bestimmen Sie danach ausgehend von dieser Basislösung durch Pivotoperationen die restlichen Basislösungen.

33. Die Koeffizientenmatrix A und der rechte Seiten Vektor b eines linearen Programms seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß die ersten drei Spalten von A eine Basislösung von $Ax = b$ liefern. Bestimmen Sie durch Pivotoperationen die restlichen Basislösungen, und prüfen Sie, welche davon entartet, bzw. zulässig sind für das System $\{\, x : Ax = b, x \geq 0 \,\}$.

34. Lösen Sie das lineare Programm $\max c^t x$ unter $Ax \le b,\ x \ge 0$ mit

$$c^t = (2\ 4\ 1\ 1), \quad b^t = (4\ 3\ 3), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

35. Lösen Sie folgendes lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \le & 4 \\ & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \le & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \le & 7 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \ge & 0 \end{array}$$

36. Gegeben sei das folgende lineare Programm P:

$$\max 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 15x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & \le & 36 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & \ge & -72 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \le & 24 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ \ge 0.$$

(a) Bestimmen Sie eine Optimallösung von P und geben Sie den zugehörigen Zielfunktionswert an.

(b) Ist die in (a) gefundene optimale Lösung eindeutig? (Begründung!)

(c) Welche der Restriktionen des Problems P können gestrichen werden, ohne die Optimallösung zu verändern? (Begründung!)

(d) Auf welchen Wert kann der Zielfunktionskoeffizient von x_1 höchstens erhöht bzw. gesenkt werden, ohne die Optimallösung zu verändern?

37. Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform der Form $\max c^t x$ unter $Ax \le b$, $x \ge 0$ sowie das folgende zugehörige Tableau mit der Basis $B = (3, 4, 6)$.

$$\begin{array}{r|rrrl} & x_1 & x_2 & x_5 & \\ 10 & c_1 & c_2 & 0 & \\ \hline b_1 & 4 & a_1 & a_2 & x_3 \\ 2 & -1 & -5 & -1 & x_4 \\ 3 & a_3 & -3 & -4 & x_6 \end{array}$$

Für welche Wahl der Parameter a_1, a_2, a_3, b_1, c_1 und c_2 gelten die folgenden Aussagen?

(a) B ist nicht zulässig.

(b) B ist zulässig, aber entartet.

(c) B ist zulässig, aber nicht optimal.

(d) B ist optimal.

(e) B ist zulässig, aber das Problem besitzt keine endliche Optimallösung.

(f) B ist optimal, aber die Optimallösung ist nicht eindeutig?

(g) B ist zulässig, aber durch Austausch der Basisvariablen x_6 gegen x_1 ergäbe sich eine Verbesserung?

(h) Wird x_2 in die Basis aufgenommen und x_3 im Gegenzug aus der Basis entfernt, so erhält man eine neue zulässige Basis mit einem Zielfunktionswert < 10.

38. Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform der Form $\max c^t x$ unter $Ax \leq b$, $x \geq 0$ sowie das folgende zugehörige Tableau mit der Basis $B = (5, 6, 7)$.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
0 & \delta & -3 & \gamma & \varepsilon & \\
\hline
\beta & \alpha & 1 & 0 & 3 & x_5 \\
2 & -2 & 2 & \varphi & -1 & x_6 \\
3 & 0 & -1 & 2 & 1 & x_7
\end{array}$$

Für welche Wahl der Parameter α, β, γ, δ, ε und φ gelten die folgenden Aussagen?

(a) B ist zulässig.

(b) B ist zulässig, aber entartet.

(c) B ist zulässig, aber nicht optimal.

(d) B ist optimal.

(e) B ist zulässig, aber das Problem besitzt keine endliche Optimallösung.

(f) B ist optimal, aber die Optimallösung ist nicht eindeutig.

(g) B ist zulässig, aber durch Austausch der Basisvariablen x_7 gegen x_3 ergäbe sich eine Verbesserung.

39. (a) Lösen Sie das lineare Programm (für den Start ist die M-Methode zu verwenden):

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3x_1 & + & x_2 & & \\
\text{unter} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2
\end{array}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

(b) Lösen Sie das lineare Programm, das sich aus dem obigen durch Ersetzen der 3. Restriktion durch $2x_1 + x_2 \leq 4$ ergibt.

40. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & 9x_1 & + & 16x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & & \\
\text{unter} & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & -10 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & \geq & 5
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

(a) Lösen Sie dieses lineare Programm mit dem Simplexverfahren ausgehend von der Basislösung, die zu $B = (2, 3)$ gehört.

(b) Lösen Sie dieses lineare Programm mit der Zweiphasenmethode von Dantzig.

41. (**Pivots per WWW**) Navigieren Sie auf die folgende WWW-Seite (Java muß aktiviert sein, damit das Tool funktioniert): `https://vanderbei.princeton.edu/JAVA/pivot/simple.html` und lesen sich den Anleitungstext der Aufgabe durch. Wählen Sie 5 als Zeilenzahl, 4 als Spaltenzahl, 1920 als Seed und und lösen Sie das resultierende lineare Programm durch Angabe der Folge der Pivotschritte. (Beachten Sie die benutzte Form der linearen Programme und achten Sie auf die richtige Interpretation der Zahlen. Wenn Sie weitere Erklärungen zum Datenformat brauchen, lesen Sie die Erläuterungen zur Simplexmethode im von Robert Vanderbei on-line zur Verfügung gestellten Kurzskriptum zu seiner Vorlesung lineare Optimierung. Sie erreichen diesen File direkt über `http://www.princeton.edu/~rvdb/542/lectures/lec2.pdf` oder durch Navigation über die Hauptseite.) Weitere Tools dieser Art finden sich auf der Webseite von R. Vanderbei.)

42. Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Wert der Funktion f mit $f(x) := x_1 + 3x_2 - x_3$ auf der Menge, die durch die folgenden Bedingungen beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0.$$

43. Lösen Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 10\,x_1 & - & 57\,x_2 & - & 9\,x_3 & - & 24\,x_4 & & \\
\text{unter} & 0,5\,x_1 & - & 5,5\,x_2 & - & 2,5\,x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\
 & 0,5\,x_1 & - & 1,5\,x_2 & - & 0,5\,x_3 & + & x_4 & \leq & 0 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

(a) mit der lexikographischen Zeilenauswahlregel,
(b) mit der kleinsten-Index-Regel (die Regel von Bland).

44. Lösen Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 4 \\
 & 2\,x_1 & & & + & 3\,x_3 & \leq & 5 \\
 & 2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \\
 & 4\,x_1 & & & + & 4\,x_3 & \leq & 11 \\
 & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} & &
\end{array}$$

(a) mit der lexikographischen Zeilenauswahlregel,
(b) mit der kleinsten-Index-Regel.

45. Folgendes ist ein Beispiel für das Kreisen des Simplexverfahrens:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & \frac{3}{4}x_1 & - & 150x_2 & + & \frac{1}{50}x_3 & - & 6x_4 & & \\
\text{unter} & \frac{1}{4}x_1 & - & 60x_2 & - & \frac{1}{25}x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\
 & \frac{1}{2}x_1 & - & 90x_2 & - & \frac{1}{50}x_3 & + & 3x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & x_1 & & x_2 & & x_3 \quad x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass das Simplexverfahren im Kreis folgende Basen erzeugen kann $B_0 = \{5, 6, 7\}$, $B_1 = \{1, 6, 7\}$, $B_2 = \{1, 2, 7\}$, $B_3 = \{3, 2, 7\}$, $B_4 = \{3, 4, 7\}$, $B_5 = \{5, 4, 7\}$, $B_6 = B_0 = \{5, 6, 7\}$. Lösen Sie das obige lineare Programm Beispiel unter Verwendung der lexikographischen Zeilenauswahlregel.