Optimierung 1 Übungsbeispiele Teil 1 SS 2019

1. **Mischungsproblem:** Ein Ernährungswissenschaftler in einem Forschungsinstitut für Nahrungsmittel möchte ein neues Mehrkornmehl entwickeln. Es stehen vier Ausgangskorntypen zur Verfügung, aus denen das neue Mehl gemischt werden soll. Diese vier Typen zeichnen sich durch die folgenden Charakteristika aus:

	% im Korn v. Typ			
	1	2	3	4
Stärke	30	20	40	25
Faseranteile	40	65	35	40
Eiweiß	20	15	5	30
Gluten	10	0	20	5
Kosten (S pro kg)	7	4	6	8

Bei der Zusammenstellung des neuen Mehles ist auf die Einhaltung der folgenden Vorschriften zu achten:

- Aus geschmacklichen Gründen darf der Anteil des 2. Korntypes 20% nicht überschreiten. Ferner hat der Anteil des 3. Types mindestens 30% zu betragen und der Anteil des 1. Typs hat zwischen 10% und 25% zu liegen.
- Der Eiweißgehalt des neuen Mehles hat mindestens 18% zu betragen. Der Glutengehalt muß zwischen 8% und 13% betragen und der Faseranteil darf maximal 50% ausmachen.

Modellieren Sie die Aufgabe, aus den vier gegebenen Korntypen ein neues Mehl unter Beachtung der obigen Vorschriften mit dem Ziel der Kostenminimierung zu mischen, als lineares Programm.

2. Eine Genossenschaft verfügt über 1000 Quadratkilometer Ackerland, die für den Anbau von Weizen, Roggen und Sojabohnen zur Verfügung stehen. Die Bewirtschaftung der Felder verlangt den Einsatz der nur begrenzt vorliegenden Ressourcen Wasser, Arbeitskraft und Geld. Maximal stehen 2 Kubikmeter Wasser, 8000 Arbeitsstunden sowie 20000 $ an Budget zur Verfügung. Ferner sind folgende Randbedingungen zu beachten:

- Pro km^2 an Land können 10t Roggen, 4t Weizen bzw. 6t Sojabohnen angebaut werden.
- Pro km^2 an Land benötigt man für Roggen 3 l Wasser, für Weizen 1 l und für Sojabohnen 2 l.
- Die Bebauung mit Roggen kostet pro km^2 15 $, mit Weizen 10 $ und mit Sojabohnen 12 $.
- Die Bebauung mit Roggen erfordert pro km^2 8 Arbeitsstunden, jene mit Weizen 6 und jene mit Sojabohnen 10.
- Der Profit pro produzierter Tonne beträgt für Roggen 10 $, für Weizen 6 $ und für Sojabohnen 8 $.

Modellieren Sie die Aufgabe einen Bebauplan zu finden, der den Profit maximiert und alle Bedingungen einhält, als lineares Programm.

3. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als lineares Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):

Die Firma B&D erzeugt Bohrmaschinen für Heimwerker. Die wesentlichen Bestandteile eines solchen Bohrers sind der Motor sowie das Gehäuse. Die vier verschiedenen Typen, die am Markt angeboten werden, unterscheiden sich in der Größe des Motors bzw. des Gehäuses sowie im Material des Gehäuses. Die Modelle 1 und 2 besitzen Gehäuse, die sich aus mehreren Metallkomponenten (Kupferlegierung) zusammensetzen, während die Gehäuse der Modelle 3 und 4 aus Kunststoff gefertigt werden. Für die nächsten Monate ist eine Knappheit an Kupfer vorhergesagt. Kupfer wird sowohl für die Metallgehäuse als auch für den Draht, der in den Motoren Verwendungen findet, benötigt. Die Firma B&D möchte daher die Produktion für die nächsten Monate planen.

Die untenstehende Tabelle gibt Aufschluß über den Resourcenbedarf:

	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4
Kunststoffbedarf (in kg)	0,82	0,62	1,42	2,03
Bedarf an Kupferlegierung für Gehäuse (in kg)	0,43	0,69	0,33	0,20
Bedarf an Draht für Motor (in m)	15	16	9	9

Es ist bekannt, daß in der nächsten Planungsperiode maximal 16000 kg an Kunststoff und maximal 5000 kg der benötigten Kupferlegierung zur Verfügung stehen. Der für die Motoren benötigte Draht kann aus 2 Quellen stammen. Zum einen existiert eine interne Produktionsmöglichkeit zu Kosten von 1,4 Euro pro m, wobei die maschinelle Kapazität eine Maximalproduktionsmenge von 80000 m gestattet. Zum anderen kann Draht in unbegrenzter Menge zu Kosten von 3,6 Euro pro m von einem externen Anbieter gekauft werden. Zur internen Herstellung von 100m Draht werden 3.6 kg Kupferlegierung verbraucht. Zu Beginn der Planungsperiode sind noch 8000 m Draht auf Lager. Die anderen Rohstoffe, die zur Endfertigung benötigt werden, sind jederzeit lieferbar und nahezu unbegrenzt erhältlich. Aus diesem Grund können diese in den Planungsüberlegungen vernachlässigt werden.

Das Management von B&D ist davon überzeugt, alle produzierten Bohrmaschinen auch absetzen zu können, allerdings darf aus Marketinggründen die Zahl der gefertigten Maschinen neueren Typs (Modelle 3 und 4) die Zahl jener älteren Typs (Modelle 1 und 2) nicht überschreiten.

Ziel der Firma ist es, den Gesamtprofit zu maximieren. Der Profit pro abgesetzter Maschine des Modells 1 beträgt 125 Euro, 113 Euro für Modell 2, 172 Euro für Modell 3 und 199 Euro für Modell 4 (in diesen Zahlen sind die Produktionskosten, mit Ausnahme der Kosten für den Draht, der für den Motor benötigt wird und aus verschiedenen Quellen kommen kann, bereits berücksichtigt).

4. **Verschnittminimierung:** Die Firma“Gaulberger” erzeugt Leichtmetallfenster. Für einen Großauftrag benötigt die Firma Stäbe in folgenden Längen und Stückzahlen.

Stab	Länge (cm)	Stück
A	181	18
B	174	150
C	155	10
D	134	100

Als Rohmaterial stehen nur Stäbe in einer Länge von 6 Metern zur Verfügung. Modellieren Sie die Aufgabe die Minimalanzahl an 6 Meter Stäben, die für den Auftrag notwendig sind, zu ermitteln als lineares Programm.

Wie ändert sich das Modell, falls in der Firma noch 10 Stäbe mit 3.2 Metern Länge verfügbar sind?

5. **Personaleinsatzplanung:** Ein Postamt benötigt an verschiedenen Wochentagen eine unterschiedliche Anzahl von Postbeamten. Langjährige Beobachtungen ergaben folgenden Bedarf.

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
17	13	15	19	14	16	11

Kollektivvertragliche Regelungen erfordern, daß jeder Angestellte 5 Tage arbeitet, und die zwei darauffolgenden Tage frei hat.

(a) Erstellen Sie ein Modell, mit dem ermittelt werden kann, wieviele Angestellte mindestens notwendig sind, um den Betrieb aufrechtzuerhalten.

(b) Angenommen, das Postamt verfügt über 25 Beamte und es können weder Neueinstellungen noch Kündigungen vorgenommen werden. Formulieren Sie das Problem, unter den gegebenen Bedingungen einen Arbeitsplan zu bestimmen, bei dem möglichst viele Beamte einen Wochenendtag (Samstag, Sonntag) frei haben, als lineares Programm.

(c) Angenommmen, es besteht die Möglichkeit von seiten der Postdirektion, einen kleinen Anteil der Beschäftigten zu veranlassen, auf einen freien Tag zu verzichten, und 6 Tage hintereinander zu arbeiten. Dabei werden für die ersten fünf Tage jeweils 100 Euro pro Tag und am sechsten Tag 140 Euro bezahlt. Es können allerdings aufgrund einer gewerkschaftlichen Übereinkunft höchstens 20 % aller Beschäftigten für die Aufgabe eines freien Tages veranlasst werden. Wie ändert sich dann das Modell?

6. **(Kraftwerkseinsatzplanung)**

Zur Stromversorgung einer Stadt stehen ein Grundlastkraftwerk G und ein Spitzenlastkraftwerk S zur Verfügung. Der Preis des von G gelieferten Stroms betrage c_g Geldeinheiten (GE) pro kWh und jener des von S gelieferten Stroms betrage c_s. Der Strombedarf in der i-ten Stunde sei b_i, $i = 1, \dots, 24$. Die Stromliefermenge x_0 von G hat über alle 24 Stunden konstant zu bleiben, die Stromliefermenge von S kann stündlich variieren.

(a) Stellen Sie ein lineares Programm auf, das zum Ziel hat, den Strombedarf zu decken und die Stromkosten zu minimieren.

(b) Geben Sie Bedingungen für die Preise c_g und c_s an, sodaß die Lösung mit $x_i = 0$, $i = 1, \dots, 24$, (d.h. das Spitzenlastkraftwerk wird nicht verwendet) und $x_0 = \max_{i=1,\dots,24} b_i$ eine Optimallösung des linearen Programms aus (6a) darstellt.

7. Gegeben sei eine Zufallsvariable Y, die die Werte $a_1, a_2, \dots, a_n$ annehmen kann. Wir wissen, daß Y entweder die Verteilung 1 besitzt, wobei

$$P(Y = a_i) = p_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gilt oder die Verteilung 2 wobei dann

$$P(Y = a_i) = q_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gilt. Es gilt $0 \leq p_i, q_i \leq 1$ für $i = 1, \dots, n$ und $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$. Basierend auf einer einzigen Beobachtung von Y möchten wir raten, welche der beiden Verteilungen vorliegt. D.h., für jede mögliche Realisierung a_j von Y entscheiden wir mit einer Wahrscheinlichkeit von x_j, daß Y entsprechend der ersten Verteilung verteilt ist und mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - x_j$, daß die zweite Verteilung vorliegt. Ziel ist es, die Ratewahrscheinlichkeiten x_j, $j = 1, \dots, n$, so zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß in Wirklichkeit Verteilung 2 vorliegt, wenn wir uns auf Verteilung 1 festlegen, nicht größer als eine gegebene Schranke von $\beta < 1$ ist. Unter Einhaltung dieser Bedingung sollen die x_j so bestimmt werden, daß die Wahrscheinlichkeit, daß tatsächlich Verteilung 1 vorliegt, wenn wir uns auf Verteilung 1 festlegen, maximiert wird.

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

8. Eine Softwarefirma vertreibt Programmpakete anderer Hersteller und kann für maximal 150000 Euro Programme einkaufen. Zur Installation und Wartung können maximal 10 Mitarbeiter herangezogen werden. Programmpaket A kostet beim Einkauf 16000 Euro, Paket B 15000 Euro. Paket C 20000 Euro und Paket D 30000 Euro. Für den Einsatz von A,B,C bzw. D werden 1,4,1 bzw. 2 Mitarbeiter benötigt. Der (Weiter)-Verkauf von A,B,C bzw. D bringt der Firma einen Gewinn von 4000 Euro, 6000 Euro, 8000 Euro bzw. 140000 Euro. Modellieren Sie die Aufgabe der Maximierung des Gesamtgewinns als lineares Programm.

9. **(Transportproblem)**

   Eine landwirtschaftliche Genossenschaft kauft Weizen bei den umliegenden Landwirten ein. Zur Bearbeitung des Weizens (Produktion von Mehl) stehen zwei Mühlen zur Verfügung. Das in den Mühlen produzierte Mehl wird in drei Märkten abgesetzt. Jeder dieser Märkte besitzt ein zentrales Warenlager, an das das in diesem Markt abzusetzende Mehl zu liefern ist.

   Die Genossenschaft hat 50000 Scheffel Weizen aufgekauft. Im Markt A (Nordburg) besteht ein Bedarf an 10000 Scheffel Mehl, im Markt B (Mittelburg) besteht ein Bedarf an 15000 Scheffel Mehl und im Markt C (Südburg) ein Bedarf an 25000 Scheffel Mehl. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß in den Mühlen aus einem Scheffel Weizen genau ein Scheffel Mehl produziert wird. (Dies kann immer erreicht werden, wenn man die Mengeneinheiten für Weizen und Mehl geeignet definiert.) Die Mahlkosten pro Scheffel Weizen in Mühle 1 betragen 1,3 GE und jene in Mühle 2 betragen 1,6 GE. Die Transportkosten von der Genossenschaft zu Mühle 1 bzw. zu Mühle 2 betragen 3,1 GE bzw. 3,3 GE pro transportiertem Scheffel Weizen. Die Transportkosten von den Mühlen zu den Absatzmärkten (in GE pro transportiertem Scheffel Mehl) sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	Nordburg	Mittelburg	Südburg
Mühle 1	1,8	2,2	2,7
Mühle 2	2,5	2,3	1,9

   Das Ziel der Genossenschaft ist es, den vorrätigen Weizen derart zu den Mühlen und das dort produzierte Mehl zu den Lagerhäusern der Absatzmärkte zu transportieren, daß der Bedarf jedes Absatzmarktes genau erfüllt wird und die Summe der Transport- und Produktionskosten (in den Mühlen) minimiert wird.

   Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

10. Ein Whiskyimporteur importiert die drei Whiskymarken Sir Roses, Highland Wind bzw. Old Frenzy. Der Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber aufgrund von Importeinschränkungen sind seine monatlichen Einkaufsmengen wie folgt begrenzt:

    - Es können maximal 2000 Flaschen Sir Roses importiert werden. Der Einkaufspreis pro Flasche beträgt 35 Euro.
    - Es können maximal 2500 Flaschen Highland Wind importiert werden. Der Einkaufspreis pro Flasche beträgt 25 Euro.
    - Es können maximal 1200 Flaschen Old Frenzy importiert werden. Der Einkaufspreis pro Flasche beträgt 20 Euro.

    Aus diesen drei Whiskymarken stellt der Importeur drei Mischungen A, B bzw. C her, die er zu 34 Euro, 28,5 Euro bzw. 22,5 Euro verkauft. Die Mischungen haben folgenden Bedingungen genügezuleisten:

    - Die Mischung A muß mindestens 60% von der Marke Sir Roses enthalten und darf maximal 20% von der Marke Old Frenzy enthalten.
    - Die Mischung B muß mindestens 15% von der Marke Sir Roses enthalten und darf maximal 60% von der Marke Old Frenzy enthalten
    - Die Mischung C darf höchstens 50% von der Marke Old Frenzy enthalten.

    Stellen Sie ein lineares Programm auf, das dem Importeur hilft herauszufinden, wie er beim Einkauf und der Herstellung der Mischungen vorzugehen hat, wenn er seinen Gewinn maximieren möchte.

11. Eine kleine Fluggesellschaft, Carinthian Panthers, fliegt die 3 Flughäfen Klagenfurt, Graz-Thalerhof und Wien Schwechat an. Wir interessieren uns in der Folge für den Freitag Nachmittag Flug, der in Wien startet, in Graz einen Zwischenstopp einlegt und in Klagenfurt endet. Es gibt drei Typen von Passagieren:

- Jene Passagiere, die von Wien nach Graz wollen (eine sehr gute Idee).
- Jene Passsagiere, die von Graz nach Klagenfurt wollen (Gott weiß warum).
- Jene Passagiere, die von Wien nach Klagenfurt wollen (es hängt wohl davon ab, welche Bekanntschaften man hat).

Das verwendete Flugzeug ist ein Propellerflugzeug mit 30 Sitzplätzen. Die Fluggesellschaft bietet die folgenden drei Tarife an:

- Klasse Y: Normalpreis.
- Klasse B: Ticketpreis nicht refundierbar bei Umbuchung oder Stornierung.
- Klasse M: Ticketpreis nicht refundierbar bei Umbuchung oder Stornierung, Ticket muß 3 Wochen im vorhinein gekauft werden.

Die Ticketpreise (in Euro), die im wesentlichen von äußeren Einflüssen abhängig sind (z.B. Konkurrenzsituation), wurden zu Saisonbeginn wie folgt festgelegt:

	Wien–Graz	Graz–Klagenfurt	Wien–Klagenfurt
Y	300	160	360
B	220	130	280
M	100	80	140

Basierend auf Erfahrungen aus der Vergangenheit haben die OR-Spezialisten von Carinthian Panthers folgende obere Schranken für die Anzahl potentieller Kunden für jede der 9 möglichen Start-Ziel/Flugklasse Kombinationen bestimmt:

	Wien–Graz	Graz–Klagenfurt	Wien–Klagenfurt
Y	4	8	3
B	8	13	10
M	22	20	18

Ziel der Flugesellschaft ist es, zu entscheiden, wieviele Tickets für jede der 9 möglichen Start-Ziel/Flugklasse Kombinationen verkauft werden sollen. Als Restriktion ist zu beachten, daß Überbuchungen auf keiner der beiden Teilstrecken erlaubt sind und daß die Anzahl der für eine Kombination angebotenen Tickets die von den OR-Experten festgelegte obere Schranke nicht überschreiten darf. Die obige Entscheidung soll unter dem Gesichtspunkt der Gewinnmaximierung getroffen werden. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

12. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als lineares Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):

    Ein Produzent von Fleischwaren hat einen Großauftrag einer Hotelkette bekommen, der die Lieferung von 10000 kg Fleischkäse umfaßt. Der Fleischkäse wird aus den vier Bestandteilen: Rindfleisch, Kalbfleisch, Schweinefleisch und Sojabohnenpaste erzeugt. Bei der Herstellung sind die folgenden Einschränkungen zu beachten:

    - Der Gehalt an Rindfleisch muß sich bezogen auf das Gesamtgewicht zwischen 40% und 60% bewegen.
    - Der Gehalt an Schweinefleisch muß sich bezogen auf das Gesamtgewicht zwischen 20% und 30% bewegen.
    - Der Gehalt an Kalbfleisch muß sich bezogen auf das Gesamtgewicht zwischen 10% und 40% bewegen.
    - Der Gehalt an Schweinefleisch darf 1.5 mal den Gehalt an Kalbfleisch nicht überschreiten.

- Der Fleischkäse muß einen Proteingehalt von mindestens 30% aufweisen und darf maximal einen Fettgehalt von 12% besitzen. (Die Protein- und Fettgehalte der einzelnen Bestandteile sind der untigen Tabelle zu entnehmen.)

	Fettgehalt (in %)	Proteingehalt (in %)	Kosten pro kg (in GE)
Rindfleisch	12	28	7
Schweinefleisch	15	29	6
Kalbfleisch	10	27	8
Sojapaste	8	36	12

Ziel der Firma ist es den Gesamtprofit zu maximieren, d.h. die Produktionskosten zu minimieren. Die Kosten für die vier Grundkomponenten sind der obigen Tabelle zu entnehmen.

13. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als lineares Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):

Ein Frachtflugzeug hat drei Abteile zur Lagerung des Frachtgutes: vorne, in der Mitte und hinten. Für die Abteile sind sowohl hinsichtlich des zulässigen Gewichts als auch hinsichtlich des Laderaums Höchstgrenzen zu beachten (diese sind der folgenden Tabelle zu entnehmen):

Abteil	Gewichtslimit (in t)	Laderaumlimit (in m^3)
vorne	12	7000
mitte	18	9000
hinten	10	5000

Um das Gleichgewicht des Flugzeugs nicht zu gefährden, muß das Ladegewicht in den einzelnen Abteilen jeweils den gleichen Prozentsatz des maximal zulässigen Gewichts der Abteile betragen. Für den kommenden Flug stehen die folgenden vier Frachtladungen zum Transport bereit:

Fracht	Gewicht (in t)	Volumen (in m^3/t)	Gewinn (in Euro/t)
1	20	500	28
2	16	700	36
3	25	600	32
4	13	400	25

Die vier Ladungen können in beliebigen Teilladungen befördert werden. Welche Menge dieser vier Frachten sollte transportiert werden und wie sollten diese Mengen auf die Abteile verteilt werden, wenn der Gesamtgewinn des Flugs maximiert werden soll?

14. **(Auswahl eines Portfolios)**

Ein Portfolio Manager einer Bank hat 10 Millionen $ für Investitionen in Obligationen zur Verfügung. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die zur Auswahl stehenden Obligationen sowie deren Kenndaten:

		Bewertung von		Jahre bis zum		Rendite nach
Name	Typ	Moody	Bank	Laufzeitende	Rendite (in%)	Steuerabzug (in %)
A	Gemeinde	Aa	2	9	8,6	8,6
B	Agentur	Aa	2	15	10,8	5,4
C	Staat	Aaa	1	4	10,0	5,0
D	Staat	Aaa	1	3	8,8	4,4
E	Gemeinde	Ba	5	2	9,0	9,0

Gemäß der Vorgaben seiner Vorgesetzten hat der Manager folgende Rahmenbedingungen bei der Auswahl eines Portfolios zu berücksichtigen:

- In Obligationen vom Typ Gemeinde dürfen maximal 3 Millionen $ investiert werden.
- Der durchschnittliche Qualitätsbewertungswert des Portfolios nach der Skala von Bank darf den Wert 1,4 nicht überschreiten. (Niedrige Werte bedeuten hohe Qualität auf dieser Skala.)
- Die durchschnittliche verbleibende Laufzeit bis zum Laufzeitende darf 5 Jahre nicht überschreiten.

(Hinweis: In den letzen beiden Restriktionen ist die jeweils investierte Summe zu berücksichtigen und in Relation zur insgesamt investierten Summe zu setzen.)

(a) Angenommen, die Obligationen werden “at par” gekauft und bis zum Ende der Laufzeit behalten. Formulieren Sie das Problem, ein Portfolio auszuwählen, das die obigen Einschränkungen erfüllt und das den Gesamtgewinn nach Steuerabzug maximiert, als lineares Programm. (Der Steuersatz beträgt 50%, aber die Gewinne aus kommunalen Obligationen sind steuerfrei.)

(b) Wie verändert sich das lineare Programm in (14a), wenn der Manager einen Kredit für bis zu 1 Million $ aufnehmen darf, für den der Zinssatz 11% vor Steuerabzug beträgt. (Effektiv führt dies zu einem Zinssatz von 5,5% mit dem der Manager rechnen muß.)

15. Sie müssen zu vier Prüfungen in den Fächern A, B, C und D antreten und diese Prüfungen in der angegebenen Reihenfolge und innerhalb von 30 Tagen ablegen. Von heute ab gerechnet, ist der früheste Termin für die erste Prüfung in 30 Tagen, der späteste Termin für die letzte Prüfung ist in 60 Tagen. Für diese Prüfungen müssen Sie noch viel lernen. Aus vielerlei Gründen erscheint es sinnvoll, beim Lernen nicht zwischen den Fächern hin- und herzuspringen, sondern vier disjunkte Intervalle zu bestimmen, in denen jeweils für ein Fach gelernt wird. Auch das Lernen soll in der Reihenfolge A, B, C, D geschehen. Nun haben Sie sich aufgrund früherer Bemühungen in den Fächern verschieden gute Ausgangspositionen erarbeitet. Jetzt (aus dem Stand heraus) würden Sie in Fach A mit 2.0, in B mit 3.0, in C mit 5 und in D mit 4.5 abschneiden. Jeder in ein Fach investierte Lerntag bringt Ihnen eine Verbesserung, wenn das Lernen vor der Prüfung erfolgt: Für A ergibt sich eine Verbesserung von 0.2 pro Lerntag, für B von 0.25, für C von 0.1 und für D von 0.2. Nachteilig ist aber, dass Sie zwischen Abbruch des Lernens in einem Fach und der Prüfung in diesem Fach durch Vergessen und Verwirrung (weil Sie ja dann für ein anderes Fach lernen) pro Tag wieder 0.1 einbüßen.

    Hinweis: *Zur Vereinfachung möge die Diskretheit der Tage ignoriert und eine kontinuierliche Zeitachse verwendet werden. Außerdem gebe es keinerlei Beschränkungen für die Noten, die beliebige reelle Werte annehmen dürfen. Insbesondere gibt es keine bestmögliche Note und auch keine schlechtestmögliche Note.*

    Sie überlegen nun, wie Sie Ihre vier Prüufungstermine einlegen sollen und wann Sie für die einzelnen Fächer lernen sollen. Modellieren Sie dieses Problem als lineares Optimierungsproblem, wenn es dabei Ihr Ziel ist, dass

    (a) die schlechteste Note so gut wie möglich wird,

    (b) die Durchschnittsnote so gut wie möglich wird,

    (c) alle 4 Prüfungen bestanden werden.

16. Die Modellbaufirma Jungenträume stellt zwei Modellbausätze für Modellautos her. Im Lager befinden sich zur Zeit die folgenden Einzelkomponenten: 215 Motoren, 525 Achsen, 440 Blöcke aus Balsa Holz sowie 560 Farbpakete. Für den Bausatz 1 werden 2 Motoren, 3 Achsen, 4 Balsa Blöcke und 2 Farbpakete benötigt. Für den Bausatz 2 werden 1 Motor, 2 Achsen, 2 Balsa Blöcke und 3 Farbpakete benötigt. Der Verkauf von Bausatz 1 resultiert in einen Gewinn von 15 $ pro Bausatz und der Verkauf von Bausatz 2 in einen Gewinn von 9,5 $ pro Bausatz. Ziel der Firma ist es, unter

Ausnützung der im Lager vorhanden Komponenten eine entsprechende Anzahl von Bausätzen der beiden Typen zu produzieren sodaß der Gewinn für die Firma maximiert wird.

(a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

(b) Angenommen, es zeigte sich in den vergangenen Monaten, daß der Absatz der Bausätze sehr schleppend vorsichgeht. Der Großmarkt Superbillig bietet der Firma Jungenträume nun an, den Verkauf der von der Firma Jungenträume aus den Lagerbeständen zusammengestellten Bausätze unter der folgenden Voraussetzung zu übernehmen: Die Firma Jungenträume muß sich verpflichten, die 60 übersteigende Zahl an Bausätzen des Typs 1 zu einem um 5$ pro Bausatz reduzierten Preis und die 50 übersteigende Zahl an Bausätzen des Typs 2 zu einem um 3$ pro Bausatz reduzierten Preis dem Markt Superbillig zur Verfügung zu stellen. Wie verändert sich das lineare Programm aus (16a) unter diesen Umständen? (Das Ziel der Firma Jungenträume bleibt nachwievor gleich. Es soll der Gewinn maximiert werden.)

17. Beim *Fahrradproblem* möchten n Personen, die über ein einziges einsitziges Fahrrad verfügen, einen 10 Kilometer langen Weg zurücklegen. Für jede Person $j = 1, \dots, n$ ist die Gehgeschwindigkeit g_j und die Radfahrgeschwindigkeit f_j bekannt. Die Ankunftszeit der letzten ankommenden Person soll minimiert werden.

(a) Versuchen Sie das Problem für $n = 3$, $g_1 = 4$, $g_2 = g_3 = 2$, $f_1 = 16$, $f_2 = f_3 = 12$ zu lösen. (Geschwindigkeiten in km/h).

(b) Zeigen Sie, dass der Optimalwert des folgenden linearen Programms eine untere Schranke für den Optimalwert des Fahrradproblems liefert:

$$\begin{array}{rrcll}
\text{minimiere} & t & & & \\
\text{unter} & t - x_j - x'_j - y_j - y'_j & \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \dots, n \\
& t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y'_j & \geq & 0 & \\
& g_j x_j - g_j x'_j + f_j y_j - f_j y'_j & = & 10 & \text{für } j = 1, 2, \dots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} f_j y_j - \sum_{j=1}^{n} f_j y'_j & \leq & 10 & \\
& x_j, x'_j, y_j, y'_j & \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \dots, n
\end{array}$$

Was bedeuten die Variablen x_j, x'_j, y_j, y'_j?

(c) (Zum Tüfteln) Finden Sie ein Beispiel, bei dem der Optimalwert des linearen Programms vom Optimalwert des Fahrradproblems verschieden ist.

18. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als *lineares* Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):

Die Firma Hokuspokus erzeugt Trampoline. Am Jahresbeginn ist für jedes der 12 Monate bekannt, wieviele Trampoline am Ende dieses Monats an die Zwischenhändler ausgeliefert werden sollen. Bezeichne d_i den Bedarf an Trampolinen am Ende von Monat $i = 1, \dots, 12$. Der Vektor $d = (d_i)$ sei wie folgt gegeben: $d = (30, 40, 20, 70, 80, 90, 100, 30, 150, 200, 150, 150)$. Trampoline, die in einem Monat produziert werden, können entweder am Ende dieses Monats ausgeliefert werden oder im Lager zur Auslieferung in einem späteren Monat gelagert werden. Die Lagerung eines Trampolins verursacht pro Monat Kosten von $c_1 = 100$ Euro. Zu Beginn des Jahres ist das Lager leer. Am Ende des Jahres muß das Lager ebenfalls wieder geleert sein. Weiters fallen in der Produktion Mengenanpassungskosten an, im Übergang zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Monaten. Diese Kosten berechnen sich wie folgt: Jede Anpassung der produzierten Menge nach oben oder unten verursacht pro Trampolin in der Über- oder Unterzahl Anpassungskosten von $c_2 = 40$ Euro. Ziel ist es, einen Produktions- und Lagerplan zu erstellen, der gewährleistet, daß die Gesamtkosten (Lagerkosten plus Produktionsanpassungskosten) minimiert werden.