Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
5.12.2008

1. Zuerst berechnet man die Ableitungen der Funktionen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(e^x - 1) & f(0) &= 1\\
f'(x) &= -\sin(e^x - 1)e^x & f'(0) &= 0\\
f''(x) &= -\cos(e^x - 1)e^{2x} - \sin(e^x - 1)e^x & f''(0) &= -1\\
g(x) &= \sin(\pi\cos(x)) & g(0) &= 0\\
g'(x) &= -\pi\sin(x)\cos(\pi\cos(x)) & g'(0) &= 0\\
g''(x) &= -\pi^2\sin^2(x)\sin(\pi\cos(x)) - \pi\cos(x)\cos(\pi\cos(x)) & g''(0) &= \pi
\end{aligned}$$

Die allgemeine Taylorentwicklung hat die Form

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathcal{R}_{n+1}$$

wobei mit $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f gemeint ist und $\mathcal{R}_{n+1}$ das $(n+1)$-te Restglied bezeichnet. Wir setzen also in diese Formel ein und erhalten

$$f(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{R}_3$$

und

$$g(x) \approx \frac{\pi}{2}x^2 + \mathcal{R}_3.$$

2. Hier könnte man analog zum obigen Beispiel die einzelnen Ableitungen ausrchnen und in die Taylorformel einsetzen. In diesem Fall gibt es aber eine elegantere und kürzere Möglichkeit, die Taylorreihe der Funktion zu bestimmen. Aus der Vorlesung kennen wir die Taylorreihe

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und

$$e^y = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}.$$

Setzen wir $y = -x$ und berücksichtigen wir nur Glieder bis zur 5. Ordnung. so ergibt sich

$$f(x) \approx \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right).$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Koeffizienten mit gleichen Potenzen in x und Ignorieren aller Terme mit Potenzen größer als 5 erhält man

$$f(x) \approx x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)x^4 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5$$

bzw.

$$f(x) \approx x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5.$$

3. (a) $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4}dx$

Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms, also können wir direkt die Methode der Partialbruchzerlegung anwenden. Es ergibt sich dabei (Methode siehe VO-Skriptum!)

$$\frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{-4}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

Es gilt also

$$I := \int \frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4} = -4\int \frac{dx}{x-1} + 4\int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

und weiter

$$I = -4 \ln|x-1| + 4 \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} + C.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+4}dx$

Da hier der Grad des Zählerpolynoms grösser ist als der des Nennerpolynoms, führen wir zunächst eine Polynomdivision aus und erhalten

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+4} = (x-1) + \frac{-x+4}{x^2+x+4}.$$

Daher ergibt sich

$$I := \int \frac{x^3+2x}{x^2+x+4}dx = \int (x-1)dx + \underbrace{\int \frac{-x+4}{x^2+x+4}dx}_{:=I_1} = \frac{x^2}{2} - x + I_1.$$

Das Polynom x^2+x+4 besitzt keine rellen Nullstellen, also ist der Integrand von I_1 nicht weiter zerlegbar. Zur Berechnung von I_1 teilt man es daher in zwei Integrale derart, dass im Zähler des ersten Integranden die Ableitung des Nennerpolynoms steht. Es ergibt sich

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx + \frac{9}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+x+4}}_{:=I_2} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+x+4) + \frac{9}{2}I_2.$$

I_2 wiederum kann nun berechnet werden, indem man den Nenner quadratisch ergänzt zu

$$x^2+x+4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = \frac{15}{4}\left(\frac{4}{15}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{15}{4}(y^2+1)$$

mit $y := \frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Mit $dx = \frac{\sqrt{15}}{2}dy$ gilt

$$I_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}\frac{4}{15}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan y + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C.$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$I = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+4) + \frac{9}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C.$$

(c) $\int x \ln x dx$

Wir verwenden partielle Integration mit $f'(x) = x$ und $g(x) = \ln x$. Dann gilt $f(x) = \frac{x^2}{2}$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$. Daher folgt:

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

(d) $\int (\ln x)^2 dx$

Wir verwenden wieder die Methode der partiellen Integration. Hier wird allerdings die Funktion $f'(x)$ künstlich eingeführt:

$$\begin{aligned} f'(x) &:= 1, & g(x) &:= (\ln\ x)^2, \\ f(x) &= x, & g'(x) &= 2\frac{\ln\ x}{x}. \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} \int 1 (\ln\ x)^2\, dx &= x(\ln\ x)^2 - \int x \cdot 2 \frac{\ln\ x}{x} dx\ + C = x(\ln\ x)^2 - 2 \int \ln\ x\, dx\ + C \\ &= x(\ln\ x)^2 - 2x(\ln\ x - 1)\ + C = x(\ln\ x)^2 - 2x\ \ln\ x + 2x\ + C. \end{aligned}$$

(e) $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$

Substituieren wir $u = \tan \frac{x}{2}$, so folgt $\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2}$ sowie $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ (siehe VO-Skriptum!) und weiters

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1 + u^2} du = \int \frac{2}{1 + u^2 + 2u} du \\ &= \int \frac{2}{(1 + u)^2} du = -\frac{2}{u + 1} + C = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

(f) $\int \frac{e^x\, dx}{(1 + e^x)^2}$

Wir substituieren $u = e^x$ und erhalten $x = \ln u$ bzw. $dx = \frac{1}{u} du$. Damit erhält man

$$\int \frac{u}{(1 + u)^2} \frac{1}{u} du = \int (1 + u)^{-2}\, du = -(1 + u)^{-1} + C = -\frac{1}{1 + e^x} + C$$