Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
21.11.2008

1. (a) Das Quotientenkriterium soll zur Bestimmung des Konvergenzradius R angewendet werden. Es gilt

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n(2^{n+1}+1)\cdot n}{(n+1)\cdot(-1)^{n-1}(2^n+1)} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \frac{(2^{n+1}+1)}{(2^n+1)} \right| = 2$$

Die Potenzreihe konvergiert daher für

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$$

absolut. Wir erhalten als Konvergenzkreis das Intervall $(0,1)$.

Für $x = 0$ lauten die Reihenglieder

$$\frac{(-1)^n(2^n+1)}{n} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1+2^{-n}}{n} > \frac{1}{n}$$

und damit erhalten wir Divergenz mit dem Minoranten-/Majorantenkriterium.

Für $x = 1$ sind die Glieder

$$\frac{(-1)^n(2^n+1)}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^n = (-1)^n \frac{1+2^{-n}}{n}$$

alternierend und ihr Betrag ist streng monoton fallend (2^{-n} ist fallend, n wachsend). Mit dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die Reihe konvergiert. Insgesamt erhalten wir Konvergenz der Potenzreihe für $x \in (0,1]$.

(b) Man kann das Quotientenkriterium anwenden. Dazu bestimmen wir

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\big(1-(-2)^{-n-2}(n+1)!\big)\, n!}{(n+1)!\big(1-(-2)^{-n-1}n!\big)} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^{-n-2} - \frac{1}{(n+1)!}}{(-2)^{-n-1} - \frac{1}{n!}} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{2}}{\frac{(-2)^{n+1}}{n!} - 1} \right|$$
$$= \frac{1}{2}$$

Daraus folgt ein Konvergenzradius von 2 und für $x \in (0,4)$ konvergiert die Reihe absolut, für $|x-2| > 2$ divergiert sie.

Im Randpunkt $x = 0$ lautet die Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-2)^{-n-1} n!}{n!} (-2)^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-2)^n}{n!} + \frac{1}{2}\right]\right).$$

Da $(1/2) + ((-2)^n/n!) \to (1/2)$ $(n \to \infty)$, bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, die Reihe divergiert also.

Im Randpunkt $x = 4$ erhält man analog die Reihenglieder $(2^n/n!) + ((-1)^n/2)$, die ebenfalls keine Nullfolge bilden. Auch hier divergiert die Reihe. Die Reihe konvergiert demnach genau für $x \in (0, 4)$.

(c) Hier wenden wir zur Bestimmung des des Konvergenzradius R das Wurzelkriterium an. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} \left|\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \left|\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Also konvergiert die Potenzreihe nach dem Wurzelkriterium für $|x+1| < 2$, d. h. $x \in (-3, 1)$. Sie divergiert für $|x + 1| > 2$.

Wenn $|x + 1| = 2$ ist, zeigt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\frac{2^n}{n^2} \left|\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)^n\right| \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\frac{2(n-1)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}\right)^n \leq \frac{1}{n^2},
\end{aligned}$$

dass durch $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$ eine konvergente Majorante gegeben ist. Also konvergiert die Potenzreihe für $x = 1$ und $x = -3$, insgesamt also für $x \in [-3, 1]$.

2. Die geomerische Reihe ist

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad \text{für} \quad |q| < 1.$$

Setzen wir $q = z/2$, so erhalten wir

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \text{für} \quad |z| < 2.$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (1+z^3)\,\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+3}}{2^n} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + 4\sum_{n=3}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \frac{9}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

für $|z| < 2$