Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
31.10.2008

1. Interpolieren Sie die Punkte

$$(x, y) = \{(-1, -9), (1, -1), (2, -3), (3, -9)\}$$

mit einem Polynom möglichst niedrigen Grades.

Einsetzen in die Lagrange'sche Interpolationsformel liefert

$$\begin{aligned}
p(x) &= -9\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} - 1\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} \\
&- 3\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} - 9\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} \\
&= \frac{3}{8}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-3) \\
&+ (x+1)(x-1)(x-3) - \frac{9}{8}(x+1)(x-1)(x-2) \\
&= -2x^2 + 4x - 3
\end{aligned}$$

2a. $ae^x - be^{-x} = 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$

$$\begin{aligned}
ae^x - be^{-x} &= 0 \\
ae^x &= be^{-x} \\
e^{2x} &= \frac{b}{a} \\
2x &= \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\
x &= \frac{1}{2}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) \\
x &= \ln(\sqrt{b}) - \ln(\sqrt{a})
\end{aligned}$$

2b. $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 1) - \ln(x + 1) = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(x^2-1)-\ln(x+1) &= 1\\
\ln(\sqrt{x^2-1})-\ln(x+1) &= 1\\
\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right) &= 1\\
\ln\left(\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{\sqrt{(x+1)^2}}\right) &= 1\\
\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) &= 1\\
\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} &= e\\
\frac{x-1}{x+1} &= e^2\\
x(e^2-1) &= -1-e^2\\
x &= \frac{1+e^2}{1-e^2}
\end{aligned}$$

Nun muss noch überprüft werden, ob die errechnete Lösung tatsächlich im Defnitionsbereich liegt. Da allerdings

$$\frac{1+e^2}{1-e^2} < -1$$

gilt und die Angabe nur für $x > 1$ definiert ist, ist die Lösungsmenge leer.

2c. $\frac{\tan(x)+1}{\sin(x)-\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(x)+1}{\sin(x)-\cos(x)} &= \frac{1}{\cos(x)}\\
\left(\frac{\sin(x)}{\cos x}+1\right)\cos(x) &= \sin(x)-\cos(x)\\
\sin(x)+\cos(x) &= \sin(x)-\cos(x)\\
2\cos(x) &= 0\\
\cos(x) &= 0
\end{aligned}$$

Da $\cos(x) \neq 0$ gelten muss, weil sonst die rechte Seite der Angabe nicht definiert ist, ist die Lösungsmenge leer.

2d. $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0.$

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) &= 0\\
\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin(2x + x) &= 0\\
\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) &= 0\\
\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + (2\sin(x)\cos(x))\cos(x) + \sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) &= 0\\
\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x) &= 0\\
\sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3\cos^2(x) - \sin^2(x)) &= 0\\
\sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))) &= 0\\
\sin(x)(2\cos(x) + 4\cos^2(x)) &= 0\\
2\sin(x)\cos(x)(1 + 2\cos(x)) &= 0
\end{aligned}$$

Das Produkt ist Null genau dann wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist. Daher ergibt sich die Lösungsmenge aus allen Lösungen von $\sin(x) = 0$ und $\cos(x) = 0$ und $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, also

$$L = \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$$