Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
23.1.2009

1. Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & p \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $p, q \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

(a) keine Lösung?

(b) eine eindeutige Lösung?

(c) unendlich viele Lösungen?

Bestimmen Sie alle Lösungen aus (b) und (c).

Lösung:

Zuerst bringen wir die erweiterte Matrix $(A|b)$ auf Zeilen-Stufen-Form:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & q \\ 3 & -1 & p & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(Zeile 2 - 2 x Zeile 1) und (Zeile 3 - 3 x Zeile 1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & q-2 \\ 0 & -4 & p-3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(Zeile 3 - Zeile 2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & q-2 \\ 0 & 0 & p-4 & 1-q \end{pmatrix}$$

Nun ist $(A|b)$ auf Zeilen-Stufen-Form.

ad (a): Ein System besitzt genau dann keine Lösung wenn $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$. Nun gilt hier $\text{rg}(A) \geq 2$ und $\text{rg}(A|b) \leq 3$. Als einzige Möglichkeit bleibt daher $\text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{rg}(A|b)$, damit $Ax = b$ nicht lösbar ist. $\text{rg}(A) = 2$ gilt genau dann wenn $p = 4$ und $\text{rg}(A|b) = 3$ gilt genau dann wenn entweder $(p-4) \neq 0$ oder $(1-q) \neq 0$. Beide Rangbedingungen sind somit genau für $p = 4$ und $q \neq 1$ erfüllt.

ad (b): Ein System besitzt genau dann eine eindeutige Lösung wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = n$

gilt. Also fordern wir $\mathrm{rg}(A) = 3$, was genau für $p \neq 4$ gilt. Die eindeutige Lösung hat die Form $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ mit

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1-q}{p-4} \\
x_2 &= -\frac{1}{4}(q-2-x_3) = -\frac{1}{4}\left(\frac{pq-2p-3q+7}{p-4}\right) \\
x_1 &= 1 - x_2 - x_3 = \frac{pq+2p+q-13}{4(p-4)}
\end{aligned}$$

ad(c): Ein System besitzt unendlich viele Lösungen wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) < n$ gilt. Wir wissen bereits, dass $\mathrm{rg}(A) \geq 2$ gilt, also kann obige Bedingung nur erfüllt werden, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 2$ hält. $\mathrm{rg}(A) = 2$ genau dann wenn $p = 4$ und $\mathrm{rg}(A|b) = 2$ genau dann wenn $p = 4$ und $q = 1$. Also gilt: $Ax = b$ hat genau dann unendlich viele Lösungen für $p = 4$ und $q = 1$. Somit hat die erweiterte Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Setzt man $x_2 = t$ als Parameter, so folgt aus $-4x_2 + x_3 = -1$, dass $x_3 = -1 + 4t$ und aus $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ folgt $x_1 = 1 - t - (-1 + 4t) = 2 - 5t$. Also hat die allgemeine Lösung die Form

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Man kann den Parameter (jetzt s) auch bei x_3 setzen, also $x_3 = s$. Dann rechnet man aus der Zeilenstufenform-Matrix von unten nach oben die Werte der Variablen aus und bekommt eine alternative Darstellung aller Lösungen durch

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass es sich um die gleiche Lösungsmenge handelt!

2. A^{-1} für $p = 3$.

   Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2. Zeile - 2 x 1. Zeile) und (3. Zeile - 3x 1. Zeile)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(3. Zeile - 2. Zeile) und 2. Zeile normieren}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{3. Zeile normieren und (1. Zeile - 2. Zeile)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (\tfrac{4}{5} \text{ x 1. Zeile - 3. Zeile) und (4 x 2. Zeile + 3. Zeile)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{1. Zeile x } \tfrac{5}{4} \text{ und 2. Zeile durch 4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Da die Matrix links gleich der Einheitsmatrix ist, folgt daraus

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$