

Tutorium Mathematik I M WM Lösungen

9.1.2009

1. Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung u_h ergibt sich durch Trennung der Veränderlichen,

$$\int \frac{du_h}{u_h} = - \int \cos(x) dx.$$

Es folgt

$$\ln |u_h(x)| = \tilde{C} - \sin x$$

mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ und daher

$$u_h(x) = C e^{-\sin x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung machen wir den Ansatz $u_p(x) = C(x) \exp(-\sin(x))$. Ableiten liefert

$$u_p'(x) = C'(x) e^{-\sin(x)} - C(x) \cos(x) e^{-\sin(x)}.$$

Dies setzen wir in die Differenzialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin(2x) &= C'(x) e^{-\sin(x)} - C(x) \cos(x) e^{-\sin(x)} \\ &\quad + \cos(x) C(x) e^{-\sin(x)} \\ &= C'(x) e^{-\sin(x)}. \end{aligned}$$

Wie erwartet heben sich die Terme mit $C(x)$ weg. Es folgt nun

$$C(x) = \frac{1}{2} \int \sin(2x) e^{\sin(x)} dx.$$

Mit der Substitution $y = \sin(x)$ mit $dy = \cos(x) dx$ und unter Beachtung von $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ folgt nun

$$C(x) = \int y e^y dy = e^y (y - 1) = e^{\sin(x)} (\sin(x) - 1).$$

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung

$$u_p(x) = \sin(x) - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

und die allgemeine Lösung

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x) = \sin(x) - 1 + C e^{-\sin x}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

2. Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differenzialgleichung mit Exponenten $\alpha = -1$. Wir müssen also die Substitution $u(x) = (v(x))^\lambda$ mit

$$\lambda = \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

durchführen. Mit

$$u'(x) = \frac{1}{2} (v(x))^{-1/2} v'(x)$$

folgt durch Einsetzen in die Differenzialgleichung

$$\frac{1}{2} (v(x))^{-1/2} v'(x) = \frac{1}{2x} (v(x))^{1/2} - \frac{1}{2} (v(x))^{-1/2}.$$

Nach Multiplikation der Gleichung mit $2(v(x))^{1/2}$ erhalten wir die lineare Differenzialgleichung

$$v'(x) = \frac{1}{x} v(x) - 1, \quad x \in (0, 1).$$

Durch Separation ergibt sich die Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung als

$$v_h(x) = C x, x \in (0, 1),$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Die Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ermitteln wir durch Variation der Konstanten,

$$v_p(x) = C(x) x, \quad v_p'(x) = C(x) + C'(x) x.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$C(x) + C'(x) x = C(x) - 1, \quad \text{also} \quad C'(x) = -\frac{1}{x}.$$

Dies liefert die Funktion $C(x) = -\ln x$ und die partikuläre Lösung

$$v_p(x) = -x \ln x, \quad x \in (0, 1).$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung ist demnach

$$v(x) = x (C - \ln x), \quad x \in (0, 1).$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$u(x) = (x (C - \ln x))^{1/2}, \quad x \in (0, 1).$$

Damit u reellwertig ist, muss $x (C - \ln x)$ für alle $x \in (0, 1)$ größer oder gleich null sein. Dies ist für $C \geq 0$ der Fall.

3. Indem wir die rechte Seite umschreiben zu

$$1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{y(x)}\right)^2 + \frac{x}{y(x)}},$$

identifizieren wir die Differenzialgleichung als eine homogen Differenzialgleichung. Mit der Substitution $z(x) = y(x)/x$ und dementsprechend

$$y'(x) = z(x) + x z'(x)$$

erhalten wir

$$z(x) + x z'(x) = 1 + \frac{x^2 (z(x))^2}{x^2 (1 + z(x))} = 1 + \frac{(z(x))^2}{1 + z(x)}.$$

Es folgt

$$z'(x) = \frac{1}{x (1 + z(x))}.$$

Durch Separation ergibt sich

$$z(x) + \frac{1}{2} (z(x))^2 + \frac{1}{2} = \ln x + \frac{C}{2}.$$

Der Summand $1/2$ auf der linken Seite ist einfach eine geschickt gewählte Integrationskonstante, denn es folgt nun

$$z(x) = -1 \pm \sqrt{2 \ln x + C}, \quad x > 0.$$

Damit ist

$$y(x) = x \left(-1 \pm \sqrt{2 \ln x + C} \right), \quad x > 0.$$