Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
12.12.2008

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,dx$
Es gilt mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned} I &= \int \ln(x^2)\,\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2x}{x^2} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \\ &= -\frac{\ln(x^2)}{x} + \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 r^2\sqrt{1-r}\,dr$

Partielle Integration führt zu

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 r^2\,\sqrt{1-r}\,dr \\ &= \left| \begin{matrix} u = r^2 & v' = (1-r)^{1/2} \\ u' = 2r & v = -\frac{2}{3}(1-r)^{3/2} \end{matrix} \right| = \\ &= \underbrace{-\frac{2r^2}{3}(1-r)^{3/2}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{4}{3}\int_0^1 r\,(1-r)^{3/2}\,\mathrm{d}r \\ &= \left| \begin{matrix} u = r & u' = 1 \\ v' = (1-r)^{3/2} & v = -\frac{2}{5}(1-r)^{5/2} \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{4}{3}\left\{ \underbrace{-\frac{2r}{5}(1-r)^{5/2}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{2}{5}\int_0^1 (1-r)^{5/2}\,\mathrm{d}r \right\} \\ &= -\frac{4}{3}\,\frac{2}{5}\,\frac{2}{7}\,(1-r)^{7/2}\Big|_0^1 = \frac{16}{105} \end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

Wir erhalten mit der Substitution $u = \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left| \begin{matrix} u = \mathrm{e}^x,\ x = \ln u & 1 \to \mathrm{e} \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u & 0 \to 1 \end{matrix} \right| = \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{u}{(1+u)^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{\mathrm{e}} (1+u)^{-2}\,\mathrm{d}u \\ &= -(1+u)^{-1}\Big|_1^{\mathrm{e}} = -\frac{1}{1+\mathrm{e}} + \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}} \end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx$

Die naheliegendste Substitution ist $u = \mathrm{e}^x$:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{e}^x \\ du = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \\
&= \int \frac{u}{u + \frac{1}{u}}\,\frac{du}{u} = \int \frac{u}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{e}^{2x}+1\right| + C\,;
\end{aligned}
$$

(e) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

Hier substituieren wir für den Logarithmus:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u \end{matrix} \right| = \int u^2\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C\,.
\end{aligned}
$$

(f) $\displaystyle\int e^x \cosh(e^x) e^{(e^x)}\,dx$

Hier substituiert man $u = \mathrm{e}^x$:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \mathrm{e}^x\,\cosh(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \\
&= \int \cosh(u)\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \left(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}\right)\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\mathrm{e}^{2u}+1\right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2u} + u\right] + C \\
&= \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^x\right] + C
\end{aligned}
$$

(g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-27)\,dx}{x^3-2x^2-3x}$

Nullsetzen des Nenners liefert

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x\,(x^2 - 2x - 3) = 0$$

und mit $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+3}$ setzen wir eine Partialbruchzerlegung an

$$\frac{x-27}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner liefert

$$x - 27 = A\,(x-3)\,(x+1) + B\,x\,(x+1) + C\,x\,(x-3)\,,$$

und die Einsetzmethode ergibt

$$
\begin{array}{rll}
x = 0: & -27 = -3A & A = 9 \\
x = 3: & -24 = -12B & B = -2 \\
x = -1: & -28 = 4C & C = -7\,.
\end{array}
$$

Damit können wir das Integral sofort ermitteln:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \left(\frac{9}{x} - \frac{2}{x-3} - \frac{7}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[9\,\ln|x| - 2\,\ln|x-3| - 7\,\ln|x+1|\right]_1^2 \\
&= 9\,(\ln 2 - \ln 1) - 2\,(\ln 1 - \ln 2) - 7\,(\ln 3 - \ln 2) \\
&= 18\,\ln 2 - 7\,\ln 3
\end{aligned}
$$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-6x-7}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx$

Die Polynomdivision entfällt wegen Grad Zähler $= 2 < 4 =$ Grad Nenner. Nun setzen wir eine Partialbruchzerlegung an

$$\frac{x^2-6x-7}{(x-2)^2\,(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner ergibt

$$\begin{aligned} x^2-6x-7 = A\,(x-2)\,(x^2+1) + B\,(x^2+1) \\ + (Cx+D)\,(x-2)^2\,. \end{aligned}$$

Wir sortieren auf beiden Seiten nach Potenzen:

$$\begin{aligned} x^2-6x-7 = (A+C)\,x^3 + (-2A+B-4C+D)\,x^2 \\ + (A+4C-4D)\,x + (-2A+B+4D) \end{aligned}$$

Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A+C &= 0\,, \\ -2A+B-4C+D &= 1\,, \\ A+4C-4D &= -6\,, \\ -2A+B+4D &= -7 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A=2$, $B=-3$, $C=-2$, $D=0$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2x}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[2\,\ln|x-2| + \frac{3}{x-2} - \ln(x^2+1)\right]_0^1 \\ &= -\frac{3}{2} - 3\,\ln 2 \end{aligned}$$