Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
10.10.2008

1. Wahrheitstafel:

A	B	C	$(B \vee C)$	$A \wedge (B \vee C)$	$((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	$(A \wedge B)$	$(A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	f
w	f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\frac{|x|-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}, \qquad (|x| \neq 1)? \tag{1}$$
Fallunterscheidung:
   (i) $\underline{|x| > 1}$: $2|x| - 2 \geq x^2 - 1$ bzw. $(|x|-1)^2 \leq 0$, also ist $L_1 = \emptyset$.
   (ii) $\underline{|x| < 1}$: $2|x| - 2 \leq x^2 - 1$ bzw. $(|x|-1)^2 \geq 0$, also ist $L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

   Die Lösungsmenge von (1) ist somit $L = L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

3. Aus
$$(z-3)(\overline{z}-3) = |z-3|^2 = 4|z+3|^2 = 4(z+3)(\overline{z}+3)$$
erhalten wir die Gleichung
$$|z|^2 - 3z - 3\overline{z} + 9 = 4|z|^2 + 12z + 12\overline{z} + 36$$
bzw.
$$|z|^2 + 5z + 5\overline{z} + 9 = 0\,.$$
Somit gilt für Zahlen $z \in M$ die Beziehung
$$|z+5|^2 = 16\,.$$
Also folgt
$$z \in K = \{z \in \mathbb{C} : |z+5| = 4\}\,.$$
Andererseits ergibt sich durch dieselbe Rechnung, dass $z \in K$ auch $z \in M$ impliziert. Somit haben wir gezeigt, dass $M = K$ ist. Die Menge beschreibt den Kreis mit Radius 4 um den Mittelpunkt $-5 \in \mathbb{C}$.

4. Wir beweisen zunächst die erste Formel mittels vollständiger Induktion:
   (a) Induktionsanfang bei $n = 1$:
   $1 \cdot 2 = 2 + 2 \cdot 0$ stimmt.

(b) Induktionsannahme: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + 2^{n+1} \cdot (n-1)$

(c) Induktionsbehauptung: $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = 2 + 2^{n+2}\, n$

(d) Induktionsschritt, $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k + (n+1) \cdot 2^{n+1} \overset{\text{Ann.}}{=} \\ &= 2 + 2^{n+1} \cdot (n-1) + (n+1) \cdot 2^{n+1} = \\ &= 2 + 2^{n+1} \cdot (n-1+n+1) = \\ &= 2 + 2^{n+1} \cdot 2n = 2 + 2^{n+2}\, n\end{aligned}$$

Auch die zweite Formel lässt sich mit einem Standard-Induktionsbeweis zeigen:

(a) Induktionsanfang bei $n = 1$:
$(-1)^2 \cdot 1 = (-1)^2 \, \frac{1 \cdot 2}{2}$ stimmt.

(b) Induktionsannahme:
$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2 = (-1)^{n+1}\, \frac{n\,(n+1)}{2}$

(c) Induktionsbehauptung:
$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1}\, k^2 = (-1)^{n+2}\, \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$

(d) Induktionsschritt, $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1}\, k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2 + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2 \overset{\text{Ann.}}{=} \\ &= (-1)^{n+1}\, \frac{n\,(n+1)}{2} + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2 = \\ &= (-1)^{n+1} \left\{ \frac{n\,(n+1)}{2} - \frac{2\,(n+1)^2}{2} \right\} = \\ &= (-1)^{n+1}\, \frac{(n-2n-2)\,(n+1)}{2} = \\ &= (-1)^{n+2}\, \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\end{aligned}$$