Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2009

62. Formulieren Sie folgende Aufgabenstellung als gemischt-ganzzahliges lineares Programm:

    Es soll eine Gemeinde neu am Reissbrett geplant werden. Eine der in diesem Rahmen zu treffenden Entscheidungen ist die Standortwahl für die zwei Feuerwehrstationen, die diese Gemeinde in Notfällen versorgen sollen. Zu Planungszwecken wurde die Gemeinde in 5 Sektoren unterteilt. Die Unterbringung beider Feuerwehrstationen im selben Sektor ist verboten. Jede Station ist für alle Einsätze in ihrem eigenen Sektor sowie in allen Sektoren, die dieser Station zugeordnet wurden, zuständig. (Eine Bedienung eines Sektors durch zwei Stationen ist nicht möglich.)

    Die folgende Tabelle gibt die durchschnittliche Reaktionszeit (in Minuten) auf einen Notfall in Abhängigkeit vom Sektor und der Lage der diesem Sektor zugeteilten Versorgungsstation an.

		Reaktionszeit für Sektor				
		1	2	3	4	5
	1	5	12	30	20	15
Zugeteilte Station	2	20	4	15	10	25
hat Standort	3	15	20	6	15	12
in Sektor	4	25	15	25	4	10
	5	10	25	15	12	5

    Die erwartete durchschnittliche Zahl an Einsätzen pro Tag pro Sektor ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	Sektor				
	1	2	3	4	5
Anzahl an Einsätzen pro Tag	2	1	3	1	3

    Es ist nun zu entscheiden, in welchen Sektoren die beiden Stationen untergebracht werden sollen sowie welche Station welchen Sektor betreut. Das Ziel ist die Minimierung der gesamten durchschnittlichen Reaktionszeiten der Feuerwehr.

63. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als gemischt-ganzzahliges lineares Programm:

    Die Entwicklungsabteilung der Firma Superinno2000 hat vier mögliche Produkte für die neue Sommerkollektion entworfen. Das Management hat nun zu entscheiden, welche der vier neuen Produkte tatsächlich produziert werden sollen und in welchen Mengen. Die Einführung jedes der neuen Produkte ist mit fixen Anlaufkosten verbunden. Die folgende Tabelle enthält diese Anlaufkosten sowie den Erlös pro verkauftem Stück für jedes der Produkte.

	Produkt			
	1	2	3	4
Anlaufkosten (in €)	50000	40000	70000	60000
Erlös pro Stück (in €)	70	60	90	80

    Das Management hat folgende Randbedingungen zu berücksichtigen:

    (a) Es können aus Kapazitätsgründen maximal zwei der neuen Produkte gefertigt werden.

    (b) Produkt 3 bzw. Produkt 4 kann nur produziert werden, wenn entweder Produkt 1 oder Produkt 2 hergestellt wird.

(c) Es stehen 6000 Stunden an Maschinenkapazität zur Verfügung. Es kann zwischen zwei alternativen Betriebsmodi der Fabrik ausgewählt werden. Im Modus 1 werden 5 Maschinenstunden zur Fertigung pro Stück des Produkts 1 benötigt, 3 Stunden für Produkt 2, 6 Stunden für Produkt 3 und 4 Stunden für Produkt 4. Im Modus 2 werden 4 Stunden pro Stück des Produkts 1 benötigt, 4 Stunden für Produkt 2, 3 Stunden für Produkt 3 und 4 Stunden für Produkt 4.

64. Die Mitglieder des Sparvereins "Pfennigfuchser" veranstalten eine Weihnachtsfeier im Lokal "Zur Wildgans". Um das gegenseitige Kennenlernen zu fördern, wird beschlossen, dass keine zwei Personen aus derselben Familie an einem Tisch Platz nehmen sollen. Im Sparverein sind Personen aus p Familien vertreten, und zwar a_i Personen aus Familie i, $i = 1, \ldots, p$. Gesucht ist nun eine Sitzverteilung, die die Sparrunde unter Berücksichtigung der obigen Einschränkungen aud die q Tische des Lokals aufteilt, wenn auf Tisch j, $j = 1, \ldots, q$, b_j Personen Platz finden. Formulieren Sie dieses Problem als Flussproblem auf einem geeignet definierten Netzwerk.

65. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{N}_0$. Wir führen durch die Transformation

$$c'(i,j) := |E| \cdot c(i,j) + 1 \quad \forall (i,j) \in E$$

eine zweite Kapazitätsfunktion c' ein.
Zeigen Sie: Ist (S,T) ein c'-minimaler Schnitt, so ist (S,T) auch ein c-minimaler Schnitt und (S,T) hat die kleinste Zahl an Kanten unter allen c-minimalen Schnitten.

66. Gegeben sei ein minimales Schnittproblem. Seien $(X, \overline{X})$ und $(Y, \overline{Y})$ zwei Schnitte im Graphen G. Zeigen Sie, dass die Kapazität eines Schnittes eine submodulare Funktion ist, d.h., dass folgende Ungleichung für je zwei Schnitte in G gilt:

$$u(X, \overline{X}) + u(Y, \overline{Y}) \geq u(X \cup Y, \overline{X \cup Y}) + u(X \cap Y, \overline{X \cap Y}).$$

67. Lösen Sie das folgende binäre Rucksackproblem mittels dynamischer Programmierung:

$$\max \; x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5$$

unter

$$6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 \leq 19,$$
$$x_j \in \{0,1\} \; (j = 1, \ldots, 5).$$

68. Lösen Sie das vorhergehende Rucksackproblem mittels *Branch and Bound*, wobei Sie zur Schrankenberechnung die lineare Relaxation, also $0 \leq x_j \leq 1$ verwenden sollen.