Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2009

56. Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\max -x_1 - 3x_2 - x_3$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Führen Sie einige Iterationen (mit Computerunterstützung) des generischen inneren Punkteverfahrens aus.

57. Lösen Sie das Transportproblem mit dem Algorithmus aus der Vorlesung für folgende Daten: $a = (3, 7, 3, 4, 2)$, $b = (4, 8, 7)$ und

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung ist die Nordwesteckenregel zu verwenden.
Ist die Optimallösung eindeutig?

58. Betrachten Sie das Transportproblem mit der Kostenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 30 & 11 & 5 & 35 & 8 & 29 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 35 & 20 & 6 & 40 & 8 & 33 \\ 19 & 2 & 4 & 30 & 10 & 25 \end{pmatrix}$$

dem Angebotsvektor $a = (30, 10 + \varepsilon, 45, 30)$ und dem Bedarfsvektor $b = (25, 20 + \varepsilon, 6, 7, 22, 35)$ mit $0 \leq \varepsilon \leq 22$.

(a) Zeigen Sie, dass der Transportplan

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 3+\varepsilon & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 22 & 17 \\ 22-\varepsilon & 8+\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

für $0 \leq \varepsilon \leq 22$ optimal ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Zielfunktionswert mit wachsendem ε streng monoton abnimmt.

(c) Sei C eine $m \times n$ Transportmatrix und q, r, s, t Indizes mit $1 \leq q \neq s \leq m$ und $1 \leq r \neq t \leq n$, sodass $c_{qt} + c_{sr} < c_{qr}$. Zeigen Sie, dass es Vektoren $a \neq a'$ und $b \neq b'$ mit $a' \geq a$ und $b' \geq b$ (komponentenweise) gibt, sodass für den optimalen Zielfunktionswert $f^*(C, a, b) > f^*(C, a', b')$ gilt.

59. Satz von König: Sei G ein bipartiter Graph. Dann ist die maximale Kardinalität eines Matchings in G gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckhung von G.

(a) Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe der Dualitätstheorie.

(b) Zeigen Sie, dass dieser Satz ein Spezialfall des Satzes über den maximalen Fluss und minimalen Schnitt ist.

60. Bestimmen Sie für das Netzwerk in Abbildung 1 einen maximalen Fluss von der Quelle zur Senke und einen minimalen Schnitt.

61. Sei $N = (G, c, s, t)$ ein Netzwerk mit Quelle s, Senke t und oberen Kantenkapazitäten $c(i, j)$ und $d : V \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion. Ziel ist es einen maximalen Fluss zu finden, der neben den Flusserhaltungsgleichungen und Kapazitätsrestriktionen auch noch die Bedingung

$$\sum_{i \in V} f(i, v) \le d(v) \quad \forall v \neq s, t$$

erfüllt.

(a) Reduzieren Sie dieses Problem auf ein gewöhnliches maximales Flussproblem.

(b) Testen Sie ihr Verfahren an dem Netzwerk in Abbildung 2 mit $d(4) = 2$ und $d(v) = \infty$ für alle $v \neq 4, s, t$.

(c) Verallgemeinern Sie den Satz von Ford und Fulkerson auf diese neue Fragestellung.

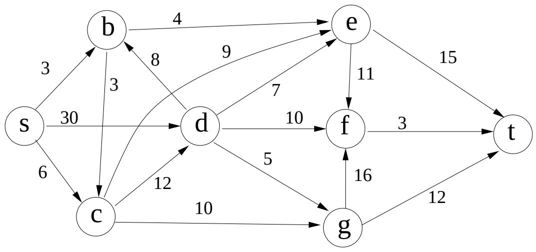

Abbildung 1: Max. Fluss - Min. Schnitt

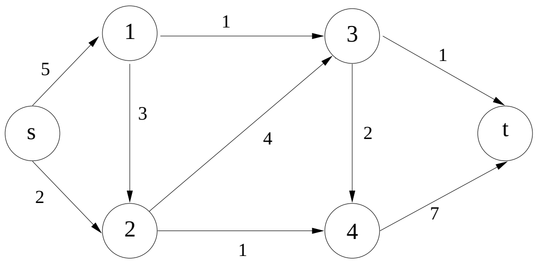

Abbildung 2: Kapazität für Knoten