Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2009

47. Die Firma Breezy verkauft Klimaanlagen in n verschiedene Regionen. Daher hat sich der Vorstand entschlossen, einige Fabriken in Städten dieser Regionen neu erbauen zu lassen.
Man kann davon ausgehen, dass man in Region j d_j Klimaanlagen verkaufen kann und die Nachfrage auf Grund wirtschaftlicher Interessen vollständig gedeckt sein sollte. Die Transportkosten c_{ij} geben an, wie teuer es ist, eine Klimaanlage, die in Stadt i produziert wurde, in der Region j zu verkaufen. Außerdem fallen Fixkosten in der Höhe von f_i an, falls man sich dazu entschließt, in Stadt i eine Fabrik errichten zu lassen. Jede Fabrik kann dabei maximal K Klimaanlagen produzieren. Ziel ist es, zu entscheiden, welche Fabriken gebaut werden sollen und einen Transportplan festzulegen, sodass die Kosten minimal sind.
Formulieren Sie das Problem als gemischt-ganzzahliges lineares Programm.

48. Modellieren Sie folgende Nebenbedingungen als lineares Programm mit binären Variablen:

    (a) Entweder $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ oder $x_1 + 4x_2 \leq 16$.

    (b) Wenn $x_1 > 0$ dann $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ($x_i \geq 0$).

    (c) Seien m lineare Restriktionen $f_i(x_1, \dots, x_n) \leq d_i$ für $i = 1, \dots, m$ gegeben. Modellieren Sie die Bedingung, dass genau (mindestens) $k < m$ Restriktionen erfüllt sein müssen.

    (d) Die lineare Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ muss Werte aus $\{d_1, \dots, d_m\}$ annehmen.

49. Gegeben sei folgendes mathematische Modell

$$\max Z = 3x_1 + 2f(x_2) + 2x_3 + 3g(x_4)$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen:

   (a) $2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 15$.

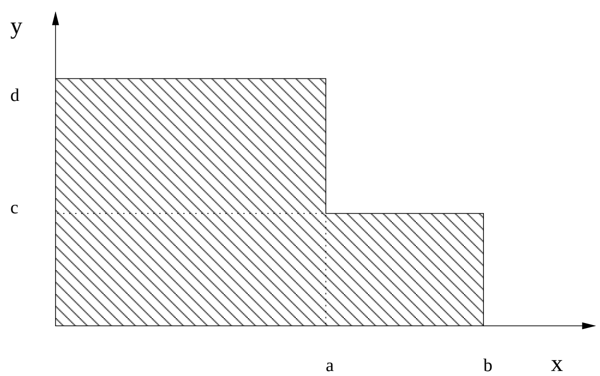
   (b) $x_1 = x_2$, oder $|x_1 - x_2| = 3$, oder $|x_1 - x_2| = 6$.

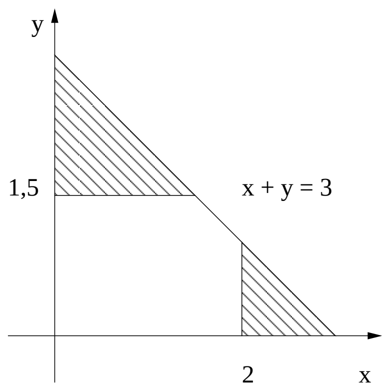
   (c) $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 4$ mit

$$f(x_2) = \begin{cases} -5 + 3x_2 & \text{wenn } x_2 > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x_4) = \begin{cases} -3 + 5x_4 & \text{wenn } x_4 > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Formulieren Sie dieses Problem als gemischt-ganzzahliges lineares Programm.

50. Die zulässigen Bereiche von zwei gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblemen (mit jeweils zwei kontinuierlichen Variablen) werden in den zwei folgenden Abbildungen dargestellt.





Bestimmen Sie für jedes Problem die Menge von Restriktionen, die den dazugehörigen zulässigen Bereich beschreiben.

51. Die MFG AG stellt eine Baugruppe in zwei veschiedenen Fabriken her. Die Baugruppen werden anschließend in eine dritte naheliegende Fabrik gebracht, wo sie in die Produktion eines bestimmten Produktes eingehen. Die Hauptsaison der Nachfrage nach diesem Produkt nähert sich, sodass es notwendig ist, vorübergehend einige Überstunden bei der Baugruppenfertigung zu machen, um die Produktionsrate innerhalb eines gewünschten Bereichs zu halten. Die Kosten pro Baugruppe im regulären Betrieb (RB) und im Überstunden-Betrieb (ÜB) für beide Fabriken sind in der folgenden Tabelle eingetragen, ebenso die maximale Zahl an Baugruppen, die an einem Tag in RB und ÜB produziert werden können.

	Stückkosten		Kapazität	
	RB	ÜB	RB	ÜB
Fabrik 1	15$	25$	2000	1000
Fabrik 2	16$	24$	1000	500

Die Gesamtzahl der pro Tag in Fabrik 1 und 2 erstellten Baugruppen sei durch x_1 und x_2 gegeben. Es wird angenommen, dass es das Ziel ist, $Z = x_1 + x_2$ unter Einhaltung des zur Verfügung stehenden Betrages von 6000$ zu maximieren. Modellieren Sie dieses Problem so einfach wie möglich.

52. Modellieren sie mit Hilfe von binären Variablen eine stückweise lineare Zielfunktion mit n Knickstellen $b_1, \ldots, b_n$.

53. Ist die folgende Matrix vollständig unimodular?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

54. Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Ist die Matrix A vollständig unimodular?

(b) Zeigen Sie, dass für alle ganzzahligen Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$ für die $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ nicht leer ist, alle Ecken von $P(b)$ ganzzahlig sind.

(c) Wie erklären sich Ihre Antworten zu den beiden vorhergehenden Punkten mit dem Zusammenhang zum Satz von Hoffmann und Kruskal aus der Vorlesung? Liegt hier ein Widerspruch vor?

55. Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph und $A = (a_{v,e})_{v \in V, e \in E}$ die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix, d.h. $a_{v,e} = 1$ falls $v \in e$ und 0 sonst. Dann ist A vollständig unimodular.