Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2009

43. Lösen Sie das folgende lineare Programm mit dem dualen Simplexverfahren

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{unter} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & \geq & 6 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 10 \\
 & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & \geq & 15
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Wie ändert sich die Optimallösung, wenn die zusätzliche Restriktion $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 8$ eingeführt wird?

44. Lösen Sie mit Hilfe des dualen Simplexverfahrens:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{unter} & x_1 & & & + & x_3 & \geq & 4 \\
 & & & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 1
\end{array}$$

$$0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 7,\ 0 \leq x_3 \leq 2.$$

45. Dualität für lineare Programme mit Absolutbeträgen:
Bringen Sie ein lineares Programm, von der Art, wie sie im folgenden angegeben ist, in Standardform. Bestimmen Sie das duale Programm und vereinfachen Sie es.

(a) ein lineares Programm, das in Standardform ist, außer dass die Variable x_1 nicht vorzeichenbeschränkt ist und in der (zu maximierenden) Zielfunktion in der Form $-|c_1 x_1|$ statt als Summand $c_1 x_1$ auftritt;

(b) ein lineares Programm in Standardform mit einer zusätzlichen Restriktion der Form $|\alpha| \leq b$, wobei α eine lineare Funktion in den Variablen $x_1, x_2, \ldots$ (ohne konstantes Glied) und b eine Konstante ist.

46. Gegeben sei das lineare Programm

$$\text{(P)} \qquad \max\{\, c^t x | Ax \leq b, x \geq 0 \,\}.$$

(a) Geben Sie ein Verfahren an zur Bestimmung einer dual zulässigen Basislösung.

(b) Testen Sie dieses Verfahren an folgendem linearen Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & - & 2x_2 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \geq & 2 \\
 & & & x_1 & \geq & 0
\end{array}$$

(c) Geben Sie für jede der folgenden Möglichkeiten ein konkretes Beispiel an:

i. (P) primal und dual zulässig,
ii. (P) primal zulässig, aber dual unzulässig,
iii. (P) primal unzulässig, aber dual zulässig,
iv. (P) primal und dual unzulässig.