Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2009

1. Eine Firma produziert Glastüren mit Alurahmen (P1) und Holzfenster (P2) und benutzt für die Herstellung drei Fabriken (F1), (F2) und (F3):
   (F1) stellt die Alurahmen für die Türen her,
   (F2) stellt die Holzrahmen für die Fenster her,
   (F3) stellt das Glas für beide Produkte her.
   Die benötigte Kapazität für die Produkte pro Einheit sind gegeben durch:

	(P1)	(P2)	Kapazität
F1	1	0	4
F2	0	2	12
F3	3	2	18
Gewinn	3	5	

   Wie soll die Produktion aufgeteilt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird?

   (a) Erstellen Sie ein mathematisches Modell für diese Optimierungsaufgabe.
   (b) Lösen Sie das lineare Programm auf graphische Weise.

2. **Mischungsproblem:** Ein Ernährungswissenschaftler in einem Forschungsinstitut für Nahrungsmittel möchte ein neues Mehrkornmehl entwickeln. Es stehen vier Ausgangskorntypen zur Verfügung, aus denen das neue Mehl gemischt werden soll. Diese vier Typen zeichnen sich durch die folgenden Charakteristika aus:

	% im Korn v. Typ			
	1	2	3	4
Stärke	30	20	40	25
Faseranteile	40	65	35	40
Eiweiß	20	15	5	30
Gluten	10	0	20	5
Kosten (€ pro kg)	0.5	0.3	0.4	0.6

   Bei der Zusammenstellung des neuen Mehles ist auf die Einhaltung der folgenden Vorschriften zu achten:

   - Aus geschmacklichen Gründen darf der Anteil des 2. Korntypes 20% nicht überschreiten. Ferner hat der Anteil des 3. Types mindestens 30% zu betragen und der Anteil des 1. Typs hat zwischen 10% und 25% zu liegen.
   - Der Eiweißgehalt des neuen Mehles hat mindestens 18% zu betragen. Der Glutengehalt muß zwischen 8% und 13% betragen und der Faseranteil darf maximal 50% ausmachen.

   Modellieren Sie die Aufgabe, aus den vier gegebenen Korntypen ein neues Mehl unter Beachtung der obigen Vorschriften mit dem Ziel der Kostenminimierung zu mischen, als lineares Programm und lösen Sie es mit AMPL!

3. **Personaleinsatzplanung:** Ein Postamt benötigt an verschiedenen Wochentagen eine unterschiedliche Anzahl von Postbeamten. Langjährige Beobachtungen ergaben folgenden Bedarf.

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
17	13	15	19	14	16	11

   Kollektivvertragliche Regelungen erfordern, daß jeder Angestellte 5 Tage arbeitet, und die zwei darauffolgenden Tage frei hat.

(a) Erstellen Sie ein Modell, mit dem ermittelt werden kann, wieviele Angestellte mindestens notwendig sind, um den Betrieb aufrechtzuerhalten.

(b) Angenommen, das Postamt verfügt über 25 Beamte und es können weder Neueinstellungen noch Kündigungen vorgenommen werden. Formulieren Sie das Problem, unter den gegebenen Bedingungen einen Arbeitsplan zu bestimmen, bei dem möglichst viele Beamte einen Wochenendtag (Samstag, Sonntag) frei haben, als lineares Programm.

(c) Angenommmen, es besteht die Möglichkeit von seiten der Postdirektion, einen kleinen Anteil der Beschäftigten zu veranlassen, auf einen freien Tag zu verzichten, und 6 Tage hintereinander zu arbeiten. Dabei werden für die ersten fünf Tage jeweils €100 / Tag und am sechsten Tag €140 bezahlt. Es können allerdings aufgrund einer gewerkschaftlichen Übereinkunft höchstens 20 % aller Beschäftigten für die Aufgabe eines freien Tages veranlasst werden. Wie ändert sich dann das Modell, wenn es das Ziel ist, die Kosten zu minimieren?

(d) Modellieren Sie das Problem in 3a wenn der Kollektivvertrag vorsieht, dass jeder Mitarbeiter 5 Tage in der Woche arbeitet und zwar in zwei Blöcken mit zwei bzw. drei Tagen. (z.B. Mittwoch und Sonntag frei).

(e) Lösen Sie die Probleme 3a und 3d mit AMPL. Gibt es Unterschiede in der Laufzeit? Was passiert wenn Sie die Ganzzahligkeitsbedingungen vernachlässigen?

4. Die Tochter der Familie MacKensie wird die Schule in vier Jahren abschließen. Ihre Eltern möchten bis zu diesem Zeitpunkt am Beginn jedes Jahres \$10.000 in Fonds ansparen. Dabei haben sie jedes Jahr folgende Möglichkeiten: Einen Fond A mit einer Laufzeit von einem Jahr und einem Ertrag von 5%, einen Fond B mit zweijähriger Laufzeit und einer Gesamtverzinsung von 12%. In diesem Jahr können sie außerdem noch einen Fonds kaufen, der vier Jahre läuft und am Ende der Laufzeit 21% garantiert. Helfen Sie den Eltern einen Investmentplan zu erstellen, der das verfügbare Kapital in vier Jahren maximiert. Verwenden Sie dazu AMPL!

5. Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem: Ein Stahlwerk erhält dringende Bestellungen für U,T,I und V Schnitte. Zur Produktion dieser Schnitte gibt es drei Walzen. In der folgenden Tabelle sind die bestellten Mengen der Schnitte, die Kapazitäten der Walzen und die Bearbeitungszeit für eine Tonne eines jeden Schnittes auf jeder Walze gegeben.

	Bearbeitungszeit (in Stunden pro Tonne)				Kapazität (in Stunden)
	U	T	I	V	
A	2	3	5	4	400
B	4	5	5	3	400
C	3	4	6	5	400
bestellte Menge (in Tonnen)	100	50	80	60	

Erstellen Sie ein lineares Programm, das den Zeitaufwand minimiert und lösen Sie es mit AMPL!

6. Ein Whiskyimporteur importiert die drei Whiskymarken Sir Roses, Highland Wind bzw. Old Frenzy. Der Importeur hat zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber aufgrund von Import-Einschränkungen sind seine monatlichen Einkaufsmengen wie folgt begrenzt:

- Es können maximal 2000 Flaschen Sir Roses importiert werden. Der Einkaufspreis pro Flasche beträgt 25.- €.
- Es können maximal 2500 Flaschen Highland Wind importiert werden. Der Einkaufspreis pro Flasche beträgt 18.- €.
- Es können maximal 1200 Flaschen Old Frenzy importiert werden. Der Einkaufspreis pro Flasche beträgt 14.- €.

Aus diesen drei Whiskymarken stellt der Importeur drei Mischungen A, B bzw. C her, die er zu 24.-, 20.- bzw. 16 €verkauft. Die Mischungen sollen folgende Bedingungen erfüllen:

- Die Mischung A muß mindestens 60% von der Marke Sir Roses enthalten und darf maximal 20% von der Marke Old Frenzy enthalten.
- Die Mischung B muß mindestens 15% von der Marke Sir Roses enthalten und darf maximal 60% von der Marke Old Frenzy enthalten
- Die Mischung C darf höchstens 50% von der Marke Old Frenzy enthalten.

Stellen Sie ein lineares Programm auf, das dem Importeur hilft herauszufinden, wie er beim Einkauf und der Herstellung der Mischungen vorzugehen hat, wenn er seinen Gewinn maximieren möchte. Lösen Sie das Problem mit AMPL!

7. Eine Nahrungsmittelfirma stellt aus Nüssen, Haferflocken und Rosinen die drei verschieden Sorten Müsli A, B und C her. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die Zusammenstellung der einzelnen Müslisorten.

	benötigte Einheiten pro Packung			Verkaufspreis
	Nüsse	Haferflocken	Rosinen	(€ pro Packung)
Müsli A	2	4	1	3,00
Müsli B	3	1	1	3,75
Müsli C	3	1	3	4,25
Kosten (€ pro Einheit)	0,5	0,25	0,75	

(a) Stellen Sie ein lineares Programm auf, das der Firma hilft, einen Produktionsplan zu entwerfen, der den Gewinn maximiert, wenn das vorhandene Kapital 1.000.000 € beträgt und höchstens 150000 Einheiten Nüsse, 200000 Einheiten Haferflocken und 300000 Einheiten Rosinen gelagert werden können.

(b) Welche Restriktionen müssen zusätzlich eingeführt werden, wenn aus technischen Gründen die Produktionsmenge einer Sorte maximal 50% der Gesamtproduktion ausmachen darf?

(c) Der Vorstand der Firma will die Marktposition stärken. Dazu ist es allerdings notwendig, alle drei Produkte zu verkaufen und auf einen Teil des maximalen Gewinns zu verzichten. Um dieses Konzept den Aktionären glaubhaft vermitteln zu können, sollte jede Sorte Gewinn machen. Erstellen Sie ein lineares Programm, das unter den obigen Voraussetzungen den kleinsten Gewinn der drei Müslisorten maximiert.

(d) Lösen Sie die Modelle in AMPL!

8. Ein Party-Service muss für Empfänge an 5 aufeinanderfolgenden Tagen Servietten zur Verfügung stellen. Der Bedarf an Servietten ist für jeden Tag bekannt.

Mo	Tu	We	Th	Fr
80	50	100	80	150

Der Party-Service-Dienst kann die benützten Servietten waschen lassen oder neue Servietten kaufen (2€ pro Serviette). Beim Waschen gibt es einen teureren Schnelldienst (1€ pro Serviette), der die Servietten schon am nächsten Tag gereinigt zurückliefert, und eine billigere Normalwäsche ($0,5$€ pro Serviette), die die Servietten am dritten Tag liefert. Am Anfang hat der Party-Service-Dienst 20 saubere Servietten und keine schmutzigen Servietten. Wie kann der Party-Service-Dienst seine Servietten-Kosten minimieren? Lösen Sie das Problem in AMPL!

9. Beim Fahrradproblem möchten n Personen, die über ein einsitziges Fahrrrad verfügen, einen d Kilometer langen Weg zurücklegen. Für jede Person $j = 1, \ldots, n$ ist die Gehgeschwindigkeit g_j und die Radfahrgeschwindigkeit f_j bekannt. Die Ankunftszeit der letzten ankommenden Person soll minimiert werden.

(a) Zeigen Sie, dass der Optimalwert des folgenden linearen Programms eine untere Schranke für den Optimalwert liefert:

$$\begin{array}{lll}
\min & t & \\
\text{s.t.} & t - x_j - x'_j - y_j - y'_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \\
& t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y'_j \geq 0 & \\
& g_j x_j - g_j x'_j + f_j y_j - f_j y'_j = d & j = 1, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} f_j y_j - \sum_{j=1}^{n} f_j y'_j \leq d & \\
& x_j, x'_j, y_j, y'_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}$$

Was bedeuten die Variablen x_j, x'_j, y_j, y'_j?

(b) Lösen Sie das Fahrradproblem für $n = 3, d = 100, g_1 = g_2 = 1, g_3 = 2, f_1 = f_2 = 6, f_3 = 8$. (Geschwindigkeit in km/h).
Hinweis: Die optimale Lösung des linearen Programms für diesen Fall ist $x_3 = 54, x_1 = x_2 = 46, y_1 = y_2 = 9, y'_3 = 1$. Alle anderen Werte sind 0.

(c) Betrachten Sie folgendes Beispiel für $n = 4$ und $d = 90$: $g_1 = g_2 = 13, g_3 = g_4 = 3, f_1 = f_2 = 27, f_3 = f_4 = 18$. Zeigen Sie, dass der Optimalwert des LPs echt kleiner ist als die Optimallösung des Fahrradproblems.
Hinweis: Das LP hat in diesem Fall die eindeutige Optimallösung $x_1 = x_2 = 9, x_3 = x_4 = 6, y_3 = y_4 = 4, y'_1 = y'_2 = 1$ und alle anderen Werte sind 0.

10. Gegeben seien folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

(a) $M_1 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1 \}$.
(b) $M_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1 \}$.
(c) $M_3 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1 \}$.
(d) $M_4 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq |x_2| \leq |x_3| \leq 1$.

Für welche dieser Mengen läßt sich eine Matrix A und ein Vektor b finden, sodaß die jeweilige Menge als $Ax \leq b$ beschrieben werden kann? (Geben Sie in jedem einzelnen Fall entweder eine solche Matrix und einen solchen Vektor an oder begründen Sie deren Nicht-Existenz.)