2. Klausur
Mathematische Optimierung (UE) am 26. Juni 2009

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6		
Punkte:	3	4	2	5	3	3		
							=	*Punkte*

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Gegeben sei ein minimales Schnittproblem. Seien $(X, \overline{X})$ und $(Y, \overline{Y})$ zwei minimale Schnitte im Graphen G, dann sind auch $(X \cup Y, \overline{X \cup Y})$ und $(X \cap Y, \overline{X \cap Y})$ minimale Schnitte.

   (b) Sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ eine vollständig unimodulare $m \times n$ Matrix mit den Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ und σ eine Permutation, dann ist auch $B = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ vollständig unimodular.

   (c) Die maximale Anzahl an kanten-disjunkten Wegen zwischen zwei Knoten s und t in einem gerichteten, zusammenhängenden Graphen G entspricht der minimalen Anzahl von Kanten, die aus G entfernt werden müssen, um alle Wege von der Quelle zur Senke zu zerstören.

2. Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -4x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 1 \\
& -2x_1 & & & + & x_3 & \leq & -2 \\
& 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

   (a) Bestimmen Sie das duale Problem!

   (b) Die Optimallösung des Problems ist $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{2}, 0, 1)$. Finden Sie eine Optimallösung für das duale Problem!

3. Entwickeln Sie für das folgende Problem einen effizienten Algorithmus:
   Sei eine $n \times m$ Matrix $A = (a_{i,j})$ mit $a_{i,j} \in \{0, 1\}$ gegeben. Gesucht ist eine Teilmenge der Zeilen und Spalten der Matrix A mit minimaler Kardinalität, in der sich alle Nullen (Elemente $a_{i,j} = 0$) befinden.

4. (a) Bestimmen Sie algorithmisch einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt für das Netzwerk in Abbildung 1!
   Starten Sie mit dem folgenden Fluss: $x(s,1) = x(1,4) = 5$, $x(4,t) = 6$, $x(2,5) = x(5,3) = x(3,t) = x(3,4) = 2$, $x(s,2) = 4$ und $x(4,5) = x(2,1) = x(1,3) = x(2,3) = x(5,t) = 1$.

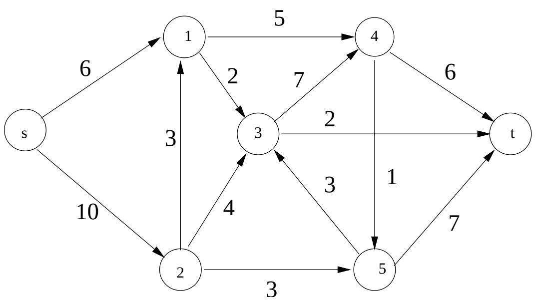

Abbildung 1: Netzwerk für Beispiel 4

(b) Wie hoch ist der Wert eines minimalen Schnitts wenn die Kapazität der Kante $(5, 3)$ auf 1 reduziert wird? Begründen Sie ihre Antwort sorgfältig!
Hinweis: Verwenden Sie die Lösung aus Beispiel 4a.

5. Gegeben sei das folgende LP:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & -6x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & & \\ \text{s.t.} & & & 3x_2 & - & x_3 & \leq & -3 \\ & -2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & -4 \\ & -3x_1 & & & + & x_3 & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Berechnen Sie **eine** Iteration des dualen Simplexverfahrens! Was können Sie dann über den optimalen Zielfunktionswert des ursprünglichen Problems aussagen?

6. Lösen Sie das Rucksackproblem:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & 8x_1 & + & 14x_2 & + & 20x_3 & + & 4x_4 & + & 9x_5 & & \\ \text{s.t.} & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & \leq & 16 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mit Hilfe der Branch-and-Bound Methode! Argumentieren Sie jeden Schritt gründlich!
Hinweis: Starten Sie mit dem Teilproblem $x_5 = 0$!