

Mathematik I für ChemikerInnen WS 2013/14

3. Übungsblatt

14. Gegeben sind drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

(a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

(b) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

15. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

16. Gegeben ist die Ebene

$$\epsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Punkte, in der die drei Koordinatenachsen die Ebene schneiden. Geben Sie mit Hilfe dieser Punkte eine Gleichung der Ebene ϵ in der Form $ax + by + cz = d$ an und bestimmen Sie den Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung.

17. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A = (0, -7)$, $B = (10, 1)$ und $C = (4, 12)$. Bestimmen Sie die Schwerlinien und den Schwerpunkt des Dreiecks.

18. Die Grundfläche eines Tetraeders ist durch das Dreieck ABC mit $A = (-4, 9, 1)$, $B = (3, 3, -1)$ und $C = (6, -1, -3)$ gegeben. Die Spitze des Tetraeders ist der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S des Tetraeders!

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Fußpunktes der Höhe F .

(c) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders!

(d) Geben Sie die Koordinaten des Punktes S' an, den man durch Spiegelung von S an der Grundfläche erhält!