Mathematik 1 für Chemiker

Verfasst von Jan Pöschko
auf Grundlage der Vorlesung von
Ao.Univ.-Prof. Dr. Clemens Heuberger

Gehalten im Wintersemester 2013/2014
von Christian Elsholtz und Johannes Hatzl

Stand: 12. September 2013

The essence of mathematics is not to make simple things complicated, but to make complicated things simple.

Stanley Gudder

Inhaltsverzeichnis

1. Terme, Gleichungen und Ungleichungen

1.1. Terme

Definition 1.1.1. Ein *Term* ist ein wohlgeformter Ausdruck aus Variablen, Konstanten, mathematischen Operatoren, Funktionen und Klammern.

Beispiele 1.1.2. Betrachte folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
x^2 + 6xy + y^2 & \quad \textit{ist} \text{ ein Term,} \\
x^2 + 6xy + y^2 = 17 & \quad \text{ist } \textit{kein} \text{ Term wegen des Zeichens } =, \\
x^2 + + + 33 & \quad \text{ist } \textit{kein} \text{ Term, da nicht wohlgeformt,} \\
x^2 + (x^2 + (x + y^2 + (3xz + 5)) & \quad \text{ist } \textit{kein} \text{ Term, da eine schließende Klammer fehlt,} \\
\sin^2 x + \cos^2 x & \quad \textit{ist} \text{ ein Term,} \\
(x + y)^2 & \quad \textit{ist} \text{ ein Term.}
\end{aligned}$$

Für Variablen können wir Werte einsetzen. Diese Werte sollen aus einer *Definitionsmenge* kommen. In $\frac{1}{x+5}$ etwa ist die Definitionsmenge für x gleich $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ (sprich $\mathbb{R}$ „ohne" die Menge $\{-5\}$).

1.2. Gleichungen

Definition 1.2.1. Eine *Gleichung* besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden werden.

Beispiele 1.2.2. Folgende Ausdrücke sind Gleichungen:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \tag{1.1}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \tag{1.2}$$

$$x^2 + 5 = 0. \tag{1.3}$$

Da das Quadrat einer reellen Zahl stets ≥ 0 ist, gibt es kein $x \in \mathbb{R}$, sodass (1.3) erfüllt ist. Die Gleichung (1.2) gilt für alle x, $y \in \mathbb{R}$; man nennt so etwas eine *Identität*. Die Gleichung (1.1) wird vermutlich für manche Werte von x erfüllt sein.

Die *Lösungsmenge* einer Gleichung ist jene Teilmenge der Definitionsmenge der beteiligten Ausdrücke, für die die Gleichung erfüllt ist. In den Beispielen sind das $L_1 = \{1, 2\}$ für (1.1) (siehe Beispiel 1.3.6), $L_2 = \mathbb{R}^2$ (also alle Paare reeller Zahlen) für (1.2), $L_3 = \emptyset$ (die leere Menge) für (1.3).

Unter dem *Lösen* einer Gleichung versteht man das Suchen der Werte der Variablen, für die die Gleichung erfüllt ist. Dazu macht man *Äquivalenzumformungen*: Das sind Umformungen, die die Lösungsmenge nicht ändern, also insbesondere

- Addieren oder Subtrahieren beliebiger Terme,
- Multiplizieren der Gleichung mit Termen ungleich 0,
- Dividieren der Gleichung durch einen Term ungleich 0.

Beispiel 1.2.3. Löse die Gleichung

$$\frac{x+7}{x+3} = 3.$$

Für $x = -3$ ist der Bruch auf der linken Seite und damit die Gleichung nicht definiert, wir müssen diesen Fall also nicht weiter betrachten. Für $x \neq -3$ können wir die Gleichung mit $x + 3$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} && \frac{x+7}{x+3} &= 3 && \mid \cdot (x+3) \\ \Leftrightarrow && x+7 &= 3(x+3) && \\ \Leftrightarrow && x+7 &= 3x+9 && \end{aligned}$$

Nun können wir x auf eine Seite bringen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow && -2 &= 2x \\ \Leftrightarrow && -1 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also $L = \{-1\}$.

Beispiel 1.2.4. Durch Quadrieren der Gleichung

$$\sqrt{x} = \sqrt{3}$$

erhält man $x = 3$. Ebenso erhält man durch Quadrieren von

$$\sqrt{x} = -\sqrt{3}$$

die Lösung $x = 3$, obwohl $\sqrt{3} \approx 1.7321 \neq -\sqrt{3}$ gilt. In Wirklichkeit hat diese zweite Gleichung keine Lösung, da $\sqrt{x} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Quadrieren ist also keine Äquivalenzumformung! Genauer gesagt können durch Quadrieren Vorzeichen „wegquadriert“ werden; es können „Phantomlösungen“ entstehen. Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, damit umzugehen:

- vor dem Quadrieren denken, wie sich die Vorzeichen verhalten, oder
- danach eine Probe durchführen, um die „Phantomlösungen“ zu eliminieren.

Beispiel 1.2.5. Löse die Gleichung

$$(x+5)^2 = (x+3)^2.$$

Um x freizustellen, wollen wir auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen. Dabei ist zu beachten, dass $a^2 = (-a)^2$ gilt:

$$\begin{aligned} && (x+5)^2 &= (x+3)^2 && |\sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow && \pm(x+5) &= \pm(x+3) \end{aligned}$$

Nun reicht es, auf *einer* Seite die zwei Vorzeichenmöglichkeiten zu unterscheiden – die zwei anderen Fälle ergeben sich äquivalent durch Mulitplizieren mit -1.

1. $$\begin{aligned} && +(x+5) &= x+3 && |-x \\ \Leftrightarrow && 5 &= 3 \end{aligned}$$

   Dies ist eine falsche Aussage, hier ergibt sich also keine Lösung.

2. $$\begin{aligned} && -(x+5) &= x+3 && |+x-3 \\ \Leftrightarrow && -8 &= 2x && |:2 \\ \Leftrightarrow && -4 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also $L = \{-4\}$.

In diesem konkreten Beispiel wäre es einfacher gewesen, die gegebene Gleichung auszuquadrieren:

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 6x + 9.$$

Daraus ergibt sich durch Kürzen sofort $4x = -16$ und damit $x = -4$.

Wie am Beispiel zu sehen ist, ist Wurzelziehen so wie Quadrieren keine Äquivalenzumformung. Es müssen Fälle je nach Vorzeichen des Ergebnisses unterschieden werden.

1.3. Polynome und polynomielle Gleichungen

Definition 1.3.1. Ein (univariates) *Polynom* ist ein Term

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_dx^d,$$

wobei $a_0, \ldots, a_d$ konstant sind, x eine Variable ist, und $a_d \neq 0$. Die a_i, $0 \leq i \leq d$, heißen *Koeffizienten.* a_0 heißt speziell *konstantes Glied.* d heißt der *Grad* des Polynoms. a_d heißt *Leitkoeffizient*, zusammen mit der ensprechenden Potenz von x heißt a_dx^d *Leitterm.*

0 heißt auch Polynom (*Nullpolynom*). Der Grad des Nullpolynoms wird als $-\infty$ definiert. Polynome vom Grad 1 nennt man *linear*, Polynome vom Grad 2 *quadratisch.*

Beispiele 1.3.2. Betrachte folgende Terme:

$x^2 + 7x + 5$	ist ein Polynom in x vom Grad 2,
$x^3 + 39x^2 + 5$	ist ein Polynom in x vom Grad 3,
2009	ist ein Polynom vom Grad 0,
$2^x + 3$	ist *kein* Polynom (x ist im Exponenten),
$\sin^2 x$	ist *kein* Polynom (sin und andere Funktionen sind verboten).

Polynome erlauben folgende Operationen:

- Einsetzen von Werten: Einsetzen von $x = 7$ in $x + 5$ ergibt 12.
- Addieren, Subtrahieren: $(x + 33) + (2x + 17) = 3x + 50$.
- Multiplizieren: $(x^2+2x+1)(x+2) = x^3+2x^2+x+2x^2+4x+2 = x^3+4x^2+5x+2$.
- Division muss kein Polynom ergeben. Normalerweise wird ein Rest auftreten.

Polynomdivision zweier Polynome $p : q$ funktioniert analog zum „schriftlichen Dividieren" von Zahlen: Solange der Grad von p größer oder gleich dem Grad von q ist, multipliziere q mit dem Quotienten der Leitterme von p und q und ziehe das Produkt von p ab. Dieser Quotient wird zum Ergebnis der Division dazuaddiert. Der Grad von p wird dadurch um zumindest 1 verringert; fahre mit dem neuen p fort. Sobald der Grad von p kleiner als der von q ist, breche ab und schreibe das verbleibende p als Rest an.

Beispiel 1.3.3 (Polynomdivision).

$$
\begin{array}{rrrl}
\big(& x^2 + 3x & +2 \big) & : \big(x + 7\big) = x - 4 + \dfrac{30}{x+7} \\
& -x^2 - 7x & & \\
\hline
& -4x & +2 & \\
& 4x & +28 & \\
\hline
& & 30 &
\end{array}
$$

also

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 7} = x - 4 + \frac{30}{x + 7}$$

bzw.

$$x^2 + 3x + 2 = (x - 4)(x + 7) + 30.$$

Beispiel 1.3.4.

$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(& x^3 & & +3x+5 \big) & : \big(x^2 + 2x + 1\big) = x - 2 + \dfrac{6x+7}{x^2+2x+1} \\
& -x^3 & -2x^2 & -x & \\
\hline
& & -2x^2 & +2x+5 & \\
& & 2x^2 & +4x+2 & \\
\hline
& & & 6x+7 &
\end{array}
$$

bzw.

$$x^3 + 3x + 5 = (x-2)(x^2 + 2x + 1) + (6x + 7).$$

Definition 1.3.5. Sei $p(x)$ ein Polynom in x. Die Werte von x, für die $p(x) = 0$ gilt, heißen *Nullstellen* von p.

Wie kann man nun die Nullstellen eines Polynoms finden? Anders ausgedrückt, wie kann man *Polynomgleichungen* der Form $p(x) = 0$ lösen, wobei $p(x)$ ein Polynom in x ist?

Wenn das Polynom vom Grad 1 ist, reichen zwei Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} & & 2x + 5 &= 17 & & \mid -5 \\ &\Leftrightarrow & 2x &= 12 & & \mid :2 \\ &\Leftrightarrow & x &= 6 & & \end{aligned}$$

Polynomgleichungen vom Grad 2 können mit der *Lösungsformel für quadratische Gleichungen* gelöst werden:

$$\begin{aligned} & & x^2 + px + q &= 0 & & \\ &\Leftrightarrow & x &= \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & & \text{(„kleine Lösungsformel")} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & & ax^2 + bx + c &= 0 & & \\ &\Leftrightarrow & x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & & \text{(„große Lösungsformel")} \end{aligned}$$

Beispiel 1.3.6. Die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

sind

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

also $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$. Die Lösungsmenge ist somit $L = \{1, 2\}$.

Hinter der Lösungsformel steckt das sogenannte *quadratische Ergänzen*:

$$\begin{aligned}
& & x^2 - 3x + 2 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} - 2 \\
&\Leftrightarrow & x - \frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{9}{4} - 2} \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}
\end{aligned}$$

Wie können nun Polynomgleichungen vom Grad > 2 gelöst werden?

Beispiel 1.3.7. Löse

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Versuche, eine Lösung zu erraten; probiere zum Beispiel $x = -1$ (siehe Bemerkung 1.3.8):

$$(-1)^3 + 4(-1)^2 + 5(-1) + 2 = -1 + 4 - 5 + 2 = 0,$$

$x = -1$ ist also eine Lösung! Das Polynom $x + 1$ hat auch diese Nullstelle, schauen wir nun also, was bei Division von $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ durch $x + 1$ passiert:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3 + 4x^2 + 5x + 2\big) : \big(x + 1\big) = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{-\,x^3 \;\; -\,x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 + 5x \\
\qquad\; \underline{-\,3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad\quad 2x + 2 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Der Rest der Division ist 0, es gilt somit

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x^2 + 3x + 2)(x + 1).$$

Eine Nullstelle des Polynoms links muss also auch Nullstelle eines der Faktoren rechts sein (und umgekehrt). Für die restlichen Nullstellen (außer $x = -1$) genügt es also, die Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 + 3x + 2$ zu suchen. Diese können entweder über die Lösungsformel gefunden werden, oder man errät noch einmal eine Nullstelle und dividiert: Für $x = -2$ ergibt sich

$$(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0,$$

also eine Nullstelle. Division liefert

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad x^2 + 3x + 2\big) : \big(x+2\big) = x+1 \\
-\,x^2 - 2x \quad\quad\quad & \\
\hline
x + 2 & \\
-\,x - 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Somit gilt

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Insgesamt haben wir auf diese Weise die Faktorisierung

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x+1)(x+1)(x+2)$$

gefunden. Die gesuchte Lösungsmenge ist damit $L = \{-2, -1\}$.

Allgemeine Vorgangsweise zur Lösung polynomieller Gleichungen $p(x) = 0$ vom Grad ≥ 3:

1. Errate eine Lösung α (siehe Bemerkung 1.3.8).
2. Führe die Polynomdivision

   $$p(x) : (x - \alpha) = q(x)$$

   durch. Als Rest muss sich 0 ergeben, sonst hat man einen Rechenfehler gemacht.
3. Dadurch ergibt sich die Zerlegung $p(x) = (x - \alpha)q(x)$, wobei $q(x)$ einen kleineren Grad als $p(x)$ hat. Zurück an den Start mit $q(x)$.
4. Nach genügend vielen Schritten hat man eine Zerlegung

   $$p(x) = C(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$$

   für eine passende Konstante C gefunden. Die Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ können abgelesen werden. Dabei ist C der Leitkoeffizient von p.

Bemerkung 1.3.8. 1. Ab dem Zeitpunkt, wo eine quadratische Gleichung auftritt, kann die quadratische Lösungsformel verwendet werden.

2. Es gibt Lösungsformeln für Gleichungen 3. und 4. Grades. Diese sind hässlich, führen zu hässlichen Lösungen und werden daher werder unterrichtet noch verwendet.
3. Für Gleichungen ab Grad 5 kann es keine Lösungsformeln geben. Das wurde von Niels Henrik Abel (1802 – 1829) bewiesen.

4. Zum Erraten von Lösungen bei Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten: Wenn es eine ganzzahlige Lösung z von $p(x) = 0$ gibt, so treten bei der Polynomdivision

$$p(x) : (x - z)$$

nur ganze Zahlen auf, das heißt, in $p(x) = (x - z)q(x)$ hat $q(x)$ lauter ganzzahlige Koeffizienten. Würde man umgekehrt

$$(x - z)(\underbrace{b_0 + b_1 x + \cdots + b_{d-1}x^{d-1}}_{q(x)})$$

ausmultiplizieren, erhielte man $-z \cdot b_0 +$ (Terme mit x). Also muss $z \cdot b_0$ das konstante Glied von $p(x)$ sein. Daher ist z ein Teiler des konstanten Glieds von $p(x)$. Geht man also davon aus, dass ein gegebenes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle hat, so kann man sich bei deren Suche auf die Teiler des konstanten Glieds beschränken.

ad Beispiel 1.3.7.

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2$$

hat das konstante Glied 2, als ganzzahlige Nullstellen sind somit nur die Teiler von 2, also ± 1, ± 2, möglich.

5. Ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und Leitkoeffizient ± 1 hat nur ganzzahlige und nichtrationale Nullstellen. (Dabei müssen nicht zwingend beide Typen vertreten sein; es können natürlich etwa wie in obigem Beispiel nur ganzzahlige Nullstellen auftreten.)

In diesen Zusammenhang gehört auch folgender

Satz 1.1 (Satzgruppe von Vieta). Wenn $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen α_1 und α_2 besitzt, so gilt

$$x^2 + px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \tag{1.4}$$

und

$$p = -\alpha_1 - \alpha_2, \tag{1.5}$$

$$q = \alpha_1 \alpha_2. \tag{1.6}$$

Beweis. Die Zerlegung (1.4) folgt aus den Überlegungen zu den Nullstellen von Polynomen. Ausmultiplizieren liefert

$$x^2 + px + q = x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 x + \alpha_1 \alpha_2 = x^2 + (-\alpha_1 - \alpha_2)x + \alpha_1 \alpha_2,$$

somit müssen also auch (1.5) und (1.6) gelten. □

Beispiel 1.3.9. Löse
$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$
Mittels Lösungsformel erhält man
$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2},$$
also $x_1 = -2$ und $x_2 = -3$.

Andererseits könnte man gemäß Vieta auch die Faktorisierungen von 6 durchprobieren:
$$1 \cdot 6, \quad (-1) \cdot (-6), \quad 2 \cdot 3, \quad (-2) \cdot (-3).$$
Die Summe der Lösungen muss -5 sein; das gilt für
$$(-2) + (-3) = -5.$$
Somit ist die Lösungsmenge $L = \{-2, -3\}$.

1.4. Einschub: Komplexe Zahlen

Die Menge der *komplexen Zahlen* ist definiert als
$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$
wobei i ein formaler Buchstabe ist. Man rechnet mit komplexen Zahlen „ganz normal“ mit der Zusatzregel
$$i^2 = -1.$$

Definition 1.4.1. Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann heißt a der *Realteil* von z und b der *Imaginärteil* von z. Schreibe
$$a = \operatorname{Re} z, \qquad b = \operatorname{Im} z.$$

Beispiel 1.4.2. Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren funktioniert wie gewohnt:
$$\begin{aligned}
(2+3i) + (4+5i) &= 6 + 8i, \\
(2+3i) - (4+5i) &= -2 - 2i, \\
(2+3i) \cdot (4-5i) &= 8 + 12i + 10i + 3 \cdot 5i^2 \\
&= 8 + 12i + 10i + 15 \cdot (-1) \\
&= -7 + 22i.
\end{aligned}$$

Erstaunlicherweise gelten die üblichen Rechenregeln: Für komplexe Zahlen s, w, z gilt
$$\begin{aligned}
w + z &= z + w & w \cdot z &= z \cdot w & &\text{(Kommutativgesetze)}, \\
s + (w + z) &= (s + w) + z & s \cdot (w \cdot z) &= (s \cdot w) \cdot z & &\text{(Assoziativgesetze)}, \\
s \cdot (w + z) &= s \cdot w + s \cdot z & & & &\text{(Distributivgesetz)}.
\end{aligned}$$

Die reellen Zahlen sieht man auch als komplexe Zahlen, im Sinne von $5 = 5 + 0 \cdot i$.

Bevor wir über die Division von komplexen Zahlen nachdenken, betrachte folgendes Beispiel:

$$(2+3i)(2-3i) = 2^2 - 3^2 \cdot i^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

(gemäß der Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$) bzw. allgemein

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Das Ergebnis der Multiplikation dieser zwei komplexen Zahlen ist also eine reelle Zahl.

Definition 1.4.3. Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann heißt

$$\overline{z} = a - bi$$

die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.

Wir haben oben gesehen, dass die Multiplikation von z und $\overline{z}$ immer eine reelle Zahl ≥ 0 ergibt.

Daraus ergibt sich nun folgender Trick für die Division: Erweitere den Bruch um die konjugiert komplexe Zahl zum Nenner.

Beispiel 1.4.4. Berechne

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{4+5i} &= \frac{(2+3)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{8+12i-10i-15i^2}{4^2+5^2} = \frac{23+2i}{41} \\ &= \frac{23}{41} + \frac{2}{41} i.\end{aligned}$$

So entsteht als Ergebnis wieder eine „wohlgeformte“ komplexe Zahl. (Das geht für alle Nenner außer $0 + 0i = 0$ gut.)

Worin besteht die Motivation hinter der Definition der komplexen Zahlen? Man will alle quadratischen Gleichungen lösen können; dabei können aber negative Zahlen unter der Wurzel auftreten.

Beispiele 1.4.5. Die Lösung von

$$x^2 + 2x + 2 = 0.$$

ergibt sich mittels Lösungsformel als

$$x = -1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i.$$

Die Lösung von

$$x^2 + 4x + 13 = 0$$

ist

$$\begin{aligned}x &= -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm \sqrt{3^2 \cdot (-1)} = -2 \pm 3\sqrt{-1} \\ &= -2 \pm 3i.\end{aligned}$$

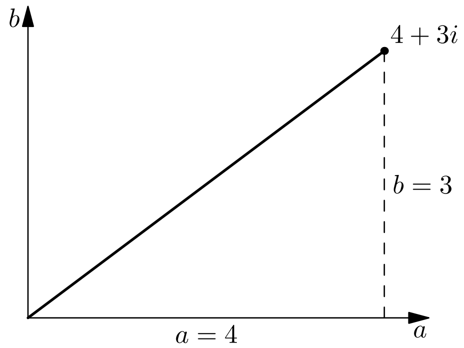


Abbildung 1.1.: $4+3i$ in der komplexen Zahlenebene.

Komplexe Zahlen sind jedoch nicht nur für quadratische Polynome sinnvoll; das zeigt insbesondere folgender

Satz 1.2 (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes Polynom $p(x)$ mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle. Also besitzt jedes Polynom $p(x)$ vom Grad d eine Zerlegung

$$p(x) = C(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_d)$$

und hat damit genau d Nullstellen (inklusive Vielfachheiten) in $\mathbb{C}$.

So wie man reelle Zahlen auf der Zahlengerade darstellt, kann man auch komplexe Zahlen graphisch darstellen:

Graphische Darstellung der komplexen Zahlen Man stellt eine komplexe Zahl $a+bi$ in der Ebene durch den Punkt (a,b) dar. Siehe Abbildung 1.1.

Der Abstand der Zahl $z = a + bi$ vom Ursprung ist gemäß Satz von Pythagoras $\sqrt{a^2+b^2}$. Dieser Abstand wird auch *Betrag* von z genannt, schreibe

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Das passt mit der „alten“ Definition des Betrags einer reellen Zahl zusammen: Zum Beispiel ist

$$|-5| = (\text{Abstand zwischen } -5 \text{ und Ursprung}) = 5$$

bzw.

$$|-5| = \sqrt{(-5)^2+0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Wir haben gesehen, dass für $z = a+bi$

$$z\cdot\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2,$$

also

$$|z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$$

gilt.

1.5. Weitere Überlegungen zum Lösen von Gleichungen

Manchmal braucht man *Fallunterscheidungen* beim Lösen von Gleichungen.

Beispiel 1.5.1. Löse

$$|x + 2| = |x + 4|\,.$$

Unterscheide Fälle je nach Vorzeichen der Argumente der Beträge:

1. $x + 2 > 0$, also $x > -2$: Dann gilt $|x + 2| = x + 2$. Löse also

$$x + 2 = |x + 4|\,.$$

   a) $x + 4 \geq 0$, also $x \geq -4$: Dann gilt $|x + 4| = x + 4$. Löse also

$$\begin{aligned} && x + 2 &= x + 4 \\ \Leftrightarrow && 0 &= 2. \end{aligned}$$

   Dies ist eine falsche Aussage, es existiert hier also keine Lösung.

   b) $x + 4 < 0$, also $x < -4$: Das tritt in Fall 1 nicht auf. Der Fall ist also „leer" und trägt daher nichts zur Lösungsmenge bei.

2. $x + 2 \leq 0$, also $x \leq -2$. Dann gilt $|x + 2| = -(x + 2)$. Löse also

$$-x - 2 = |x + 4|\,.$$

   a) $x + 4 > 0$, also $x > -4$: Dann gilt $|x + 4| = x + 4$. Löse also

$$\begin{aligned} && -x - 2 &= x + 4 \\ \Leftrightarrow && 2x &= -6 \\ \Leftrightarrow && x &= -3. \end{aligned}$$

   Das passt zu $-4 < x \leq -2$, wir haben also eine (vorerst Teil–)Lösungsmenge

$$L_{2\mathrm{a}} = \{-3\}$$

   gefunden.

   b) $x + 4 \leq 0$, also $x \leq -4$: Dann gilt $|x + 4| = -(x + 4)$. Löse also

$$\begin{aligned} && -x - 2 &= -x - 4 \\ \Leftrightarrow && 0 &= -2. \end{aligned}$$

   Dies ist eine falsche Aussage; in diesem Fall gibt es also keine Lösung.

Die Gesamtlösungsmenge ist also $L = \{-3\}$.

Alternativ könnte man gleich zu Beginn feststellen, dass die auftretenden Beträge Fallunterscheidungen bei $x = -2$ und $x = -4$ erfordern. Dann hätte man die drei Fälle $x < -4$, $-4 \leq x < -2$ und $x \geq -2$ zu betrachten. Dies ist vor allem dann effizienter, wenn noch mehr Beträge auftreten.

1.6. Ungleichungen

Eine *Ungleichung* besteht aus zwei Termen, die durch ein *Ungleichheitszeichen* verbunden sind, also durch eines der folgenden Zeichen:

$$< \qquad > \qquad \leq \qquad \geq$$

Ungleichungen sind nur für *reelle* Zahlen sinnvoll, da es auf den komplexen Zahlen keine entsprechende Ordnung gibt.

Beispiel 1.6.1. Betrachte die Ungleichung

$$x^2 + 2x + 2 \geq 0.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, da $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$. Man nennt solche Ungleichungen *absolut* oder *unbedingt*.

Bei *bedingten* Ungleichungen stellt sich die Frage nach der *Lösungsmenge* der Ungleichung, also jener Werte für die auftretenden Variablen, für die die Ungleichung gilt. Um eine Ungleichung zu lösen, führt man wie bei Gleichungen *Äquivalenzumformungen* durch, also Umformungen beider Seiten der Gleichungen, die die Lösungsmenge nicht ändern. Das sind insbesondere

- Addieren und Subtrahieren von beliebigen Termen,
- Multiplizieren mit Termen ungleich 0,
- Dividieren durch Terme ungleich 0.

Dabei ist zu beachten, dass sich bei Multiplikation mit Termen < 0 bzw. bei Division durch Terme < 0 *das Ungleichheitszeichen umdreht*!

Beispiel 1.6.2. Löse die Ungleichung

$$\begin{aligned} && -2x &\geq 7 && \mid :(-2) \\ \Leftrightarrow && x &\leq \frac{7}{2}. && \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also

$$L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \tfrac{7}{2}\right\} = \left(-\infty, \tfrac{7}{2}\right].$$

(In diesem Abschnitt werden wir der Vollständigkeit halber immer sowohl Mengen- als auch Intervallschreibweise der Lösungsmenge anführen; korrekt und ausreichend wäre natürlich bereits eine davon.)

Beispiel 1.6.3. Löse die Ungleichung

$$\frac{x+7}{x+3} \geq 3.$$

Um den Bruch loszuwerden, ist die erste Idee, mit dem Nenner $x+3$ zu multiplizieren. Dabei müssen aber folgende Fälle unterschieden werden:

1. $x + 3 = 0$, d.h. $x = -3$: Der Nenner ist dann 0, die Multiplikation wäre also keine Äquivalenzumformung. Allerdings ist die Ungleichung dann gar nicht definiert, der Fall muss also nicht weiter berücksichtigt werden und wir haben als Lösungsmenge für diesen Fall
$$L_1 = \emptyset.$$

2. $x + 3 > 0$, d.h. $x > -3$: Bei Multiplikation mit dem (positiven) Nenner dreht sich das Ungleichheitszeichen *nicht* um, die gegebene Ungleichung ist also äquivalent zu
$$\begin{aligned} & & x+7 &\geq 3(x+3) & & \\ &\Leftrightarrow & x+7 &\geq 3x+9 & &\mid -x-9 \\ &\Leftrightarrow & -2 &\geq 2x & &\mid :2 \\ &\Leftrightarrow & -1 &\geq x. & & \end{aligned}$$
Ausgegangen wurde in diesem Fall von $x > -3$, zusammen ergibt das die Lösungsmenge für diesen Fall
$$L_2 = (-3, -1]\,.$$

3. $x + 3 < 0$, d.h. $x < -3$: Bei Multiplikation mit dem (negativen) Nenner dreht sich das Ungleichheitszeichen *um*, die gegebene Ungleichung ist also äquivalent zu
$$\begin{aligned} & & x+7 &\leq 3(x+3) & & \\ &\Leftrightarrow & x+7 &\leq 3x+9 & &\mid -x-9 \\ &\Leftrightarrow & -2 &\leq 2x & &\mid :2 \\ &\Leftrightarrow & -1 &\leq x. & & \end{aligned}$$
Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme $x < -3$ in diesem Fall, daher ist die Lösungsmenge leer,
$$L_3 = \emptyset.$$

Die Gesamtlösungsmenge ist nun die Vereinigung der einzelnen Lösungsmengen, also
$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (-3, -1]\,.$$
Siehe auch Abbildung 1.2.

Beispiel 1.6.4. Löse die Ungleichung
$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \geq 0.$$

Der erste Schritt zur Lösung einer solchen *Polynomungleichung* ist die Faktorisierung des Polynoms auf der linken Seite. Dazu dienen die Nullstellen des Polynoms (siehe Abschnitt 1.3). Probiert man die Teiler des konstanten Glieds 2 durch, stellt man fest,

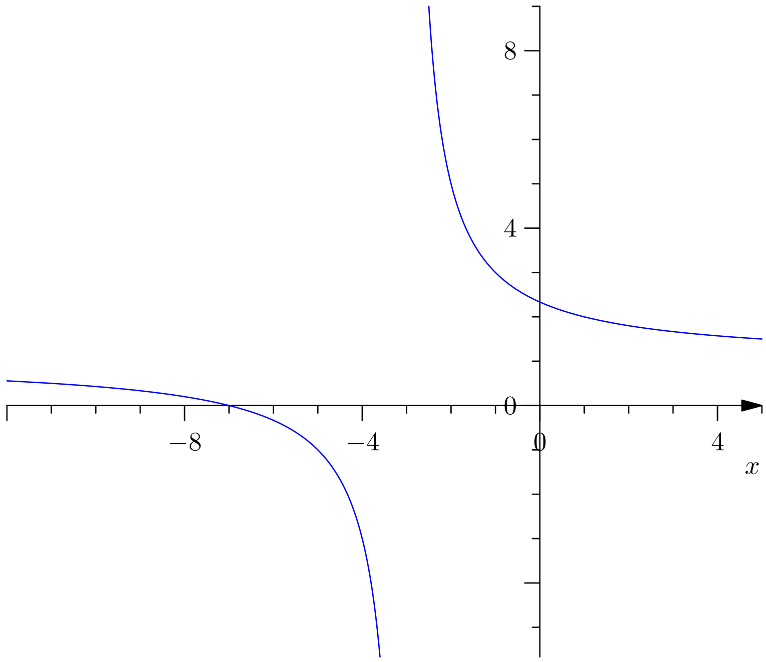


Abbildung 1.2.: $\frac{x+7}{x+3}$

dass $x_1 = -1$ eine Nullstelle ist. Mittels Polynomdivision durch $(x - x_1)$ erhält man das verbleibende Polynom

$$(x^3 + 4x^2 + 5x + 2) : (x + 1) = x^2 + 3x + 2.$$

Die Nullstellen dieses quadratischen Polynoms ergeben sich durch die Lösungsformeln

$$x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

also $x_2 = -1$ und $x_3 = -2$. Die Faktorisierung des Polynoms ist also

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)^2 \cdot (x + 2).$$

Die zu lösende Ungleichung lautet damit

$$(x + 1)^2 \cdot (x + 2) \geq 0.$$

Nun gilt unabhängig von x sicher $(x + 1)^2 \geq 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $(x + 1)^2 = 0$, d.h. $x + 1 = 0$ und somit $x = -1$: Die Ungleichung ist für $x = -1$ erfüllt.

2. $(x + 1)^2 > 0$, d.h. $x \neq -1$: Dann kann durch $(x + 1)^2$ dividiert werden und wir erhalten die äquivalente Ungleichung

$$\begin{aligned} & x + 2 \geq 0 && \mid -2 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq -2. && \end{aligned}$$

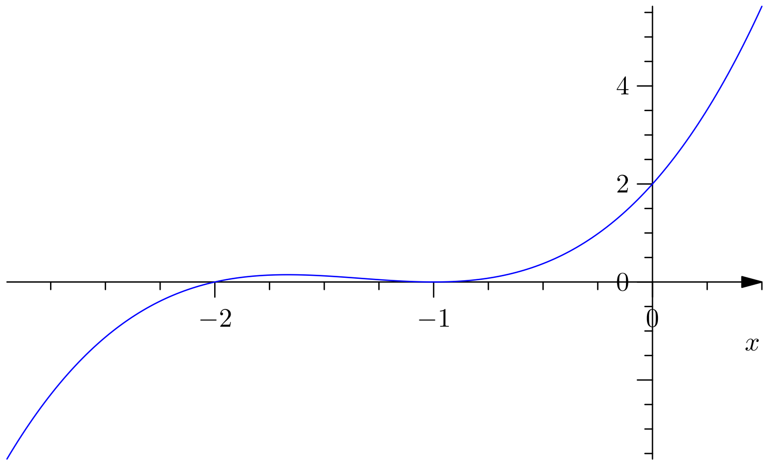


Abbildung 1.3.: $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

Da der Fall $x = -1$ in $x \geq -2$ „enthalten" ist, ist die Gesamtlösungsmenge damit

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\} = [-2, \infty)\,.$$

Siehe Abbildung 1.3.

Beispiel 1.6.5. Löse die Ungleichung

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 \geq 0.$$

Wieder finden wir zuerst eine Faktorisierung des Polynoms auf der linken Seite durch Nullstellensuche. $x_1 = 1$ ist eine Nullstelle, Polynomdivision ergibt

$$(x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2.$$

Eine weitere Nullstelle ist $x_2 = -1$, Polynomdivision ergibt

$$(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) : (x + 1) = x^2 + 2x + 2.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind gemäß Lösungsformel

$$x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i,$$

also (echt) komplex. Die vollständige Faktorisierung des Polynoms wäre also

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 1 + i)(x - 1 - i),$$

durch „Wieder-Zusammenfassen" der konjugiert komplexen Nullstellen erhalten wir aber die für unseren Fall praktischere Faktorisierung

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2x + 2).$$

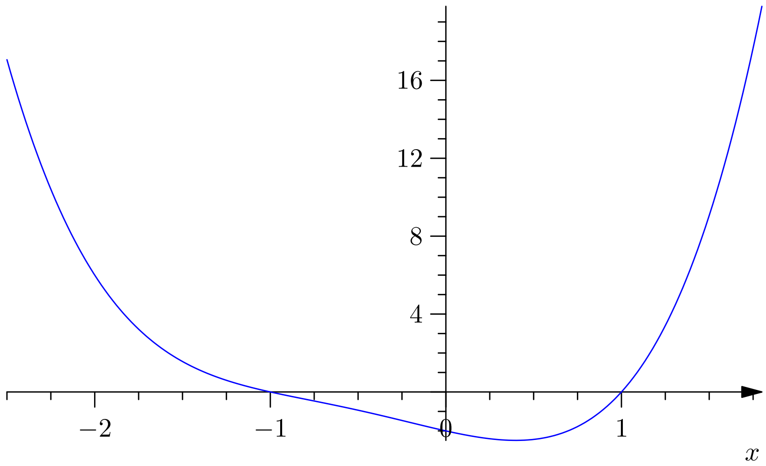


Abbildung 1.4.: $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2$

Eingesetzt in die zu lösende Ungleichung bedeutet das

$$(x-1)(x+1)(x^2+2x+2) \geq 0.$$

Von dem Polynom $x^2 + 2x + 2$ wissen wir, dass es immer größer als 0 ist (siehe Beispiel 1.6.1). Wir können also durch diesen Term dividieren und erhalten die äquivalente Ungleichung

$$(x-1)(x+1) \geq 0.$$

Ist einer der zwei Faktoren 0, ist die Ungleichung erfüllt, das heißt, $x = 1$ und $x = -1$ sind auf jeden Fall Lösungen. Ansonsten unterscheiden wir folgende Fälle:

1. $x - 1 > 0$, also $x > 1$: Dann kann durch $x - 1$ dividiert werden und wir erhalten äquivalent
$$x + 1 \geq 0,$$
also $x \geq -1$. Zusammen mit der Annahme $x > 1$ (die „stärkere“ Aussage) bedeutet das nichts anderes als $x > 1$.

2. $x - 1 < 0$, also $x < 1$: Dann dreht sich bei Division durch $x - 1$ das Ungleichheitszeichen um und wir erhalten
$$x + 1 \leq 0,$$
also $x \leq -1$. Die Annahme $x < 1$ ist damit bereits erfüllt.

Zusammenfassend erhalten wir also die Lösungen $x = \pm 1$, $x > 1$ oder $x \leq -1$. Die Lösungsmenge lautet damit

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ oder } x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$$

(alles gleichbedeutende Schreibweisen). Siehe Abbildung 1.4.

Allgemeine Vorgangsweise zum Lösen von Polynomungleichungen der Form $p(x) \geq 0$ bzw. $p(x) > 0$:

1. Faktorisierung des Polynoms $p(x)$ in Linearfaktoren (siehe Abschnitt 1.3).

2. Zusammenfassen von konjugiert komplexen Nullstellen zu quadratischen Faktoren. Diese sind, abhängig vom Vorzeichen des Leitkoeffizienten, > 0 für alle $x \in \mathbb{R}$ oder < 0 für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher können diese quadratischen Faktoren ohne viel Aufwand – gegebenenfalls ist das Ungleichheitszeichen umzudrehen – „abdividiert“ werden.

3. Lautet die Ungleichung $p(x) \geq 0$, enthält sie also die Gleichheit, sind alle Nullstellen von $p(x)$ Lösungen und müssen in weiterer Folge nicht mehr betrachtet werden. Im Fall $p(x) > 0$ sind sie sicher keine Lösungen.

4. Fallunterscheidungen nach Vorzeichen der einzelnen Linearfaktoren und entsprechendes Abdividieren führen auf die Lösungsmenge.

1.7. Wichtige Identitäten

In diesem Abschnitt sollen kurz zwei wesentliche Gruppen von Identitäten vorgestellt (bzw. wiederholt) werden, deren „Verinnerlichung“ bei vielen Aufgabenstellungen nützlich sein kann.

Satz 1.3 (Binomischer Lehrsatz). Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ergibt sich durch Auspotenzieren der n-ten Potenz eines Binoms $(a+b)$ die Identität

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

wobei der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ (sprich „n über k“, „n choose k“) definiert ist als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

(vgl. LV *Mathematik 0*).

Im Speziellen heißt das

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && (n=2),\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 && (n=3),\\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 && (n=4).
\end{aligned}$$

Zerlegung von Differenzen n-ter Potenzen

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right). \tag{1.7}$$

Im Speziellen heißt das

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) && (n=2),\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) && (n=3),\\
a^4 - b^4 &= (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) && (n=4).
\end{aligned}$$

2. Funktionen

2.1. Grundlegendes

Eine *Funktion* ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die *jedem* Element der einen Menge (*Definitionsmenge*, *domain*) *genau ein* Element der anderen Menge (*Wertemenge*, *codomain*) zuordnet. Schreibe

$$f : D \to W.$$

Mit einer *Zuordnungsvorschrift*

$$x \mapsto f(x)$$

kann angegeben werden, wie diese Zuordnung aussieht. $f(x) \in W$ heißt *Funktionswert* von f an der Stelle $x \in D$.

Beispiele 2.1.1. 1. Durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

ist eine Funktion definiert, die jeder reellen Zahl x ihr Quadrat x^2 zuordnet, d.h. etwa $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(-3) = 9$. Alternativ könnte z.B.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2$$

geschrieben werden. Siehe Abbildung 2.1.

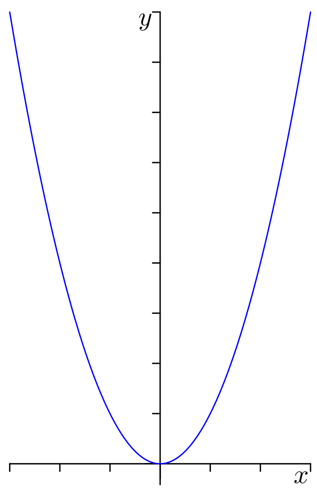


Abbildung 2.1.: Funktion $x \mapsto x^2$.

2. Durch
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$$
ist *keine* Funktion definiert, da g für $x = 0$ nicht definiert ist. Durch entsprechende Einschränkung des Definitionsbereichs kann man allerdings eine Funktion definieren, z.B.
$$g^* : \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\mathbb{R} \text{ „ohne“ } \{0\}} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}.$$
Siehe Abbildung 2.25.

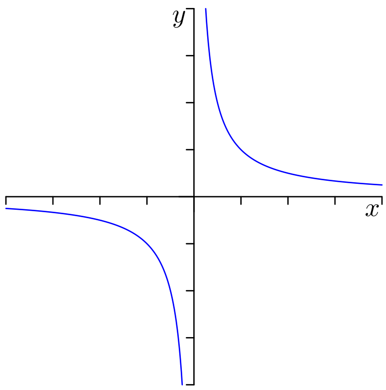


Abbildung 2.2.: Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$.

3. Ebenso ist die „Umkehrung“ der Funktion f,
$$h(x) = \pm\sqrt{x},$$
keine Funktion, da h nicht jedem Wert *genau einen* Wert zuordnet. h ist etwa für $x = 4$ mit den „Funktionswerten“ 2 und -2 mehrdeutig.

Eine Funktion f kann durch ihren *Graph* visualisiert werden; das sind Punkte $(x, f(x))$ in einem Koordinatensystem (x, y).

Darstellung von Funktionen Eine Funktion kann auf verschiedene Arten dargestellt (definiert) werden:

explizit: mittels Zuordnungsvorschrift.

implizit: aus einer Gleichung heraus.

Beispiel 2.1.2. Betrachte die Gasgleichung für ein ideales Gas,
$$p \cdot V = R \cdot T,$$

mit Druck p, Volumen V, absoluter Temperatur T und universeller Gaskonstante $R = 8.314472\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$. p, V, T können darin jeweils als Funktionen der anderen Größen gesehen werden.

Diese Funktionen können durch Umformen „explizit gemacht werden“: Zum Beispiel ist der Druck bei gegebener Temperatur eine Funktion in Abhängigkeit des Volumens

$$p(V) = \frac{RT}{V}.$$

Achtung: Bei $V = 0$ ist diese Funktion nicht definiert!

Ebenso aufpassen z.B. bei $y^2 = x$: y ist hier keine Funktion von x, da mehrdeutig (siehe Beispiel 2.1.1)! Mit einer Zusatzinformation (z.B. $y \geq 0$) kann es allerdings zu einer Funktion gemacht werden:

$$y = \sqrt{x}.$$

tabellarisch: Auflistung der Werte in der Definitionsmenge und der entsprechenden Funktionswerte.

Beispielsweise $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$:

x	$f(x)$
1	4
2	1
3	1
4	5

Manchmal ist eine Funktion zwar für viele Werte definiert, aber es sind nur ein paar Tabellenwerte verfügbar. Um daraus eine Funktion zu machen, kann z.B. *lineare Interpolation* verwendet werden. Siehe Abbildung 2.3.

Stückweise definierte Funktionen Funktionen können *stückweise* definiert werden, indem für einzelne Teilmengen des Definitionsbereiches separate Zuordnungsvorschriften angegeben werden.

Beispiel 2.1.3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{falls } x < -2, \\ 2x, & \text{falls } -2 \leq x < 4, \\ x, & \text{falls } x \geq 4. \end{cases}$$

Siehe Abbildung 2.4.

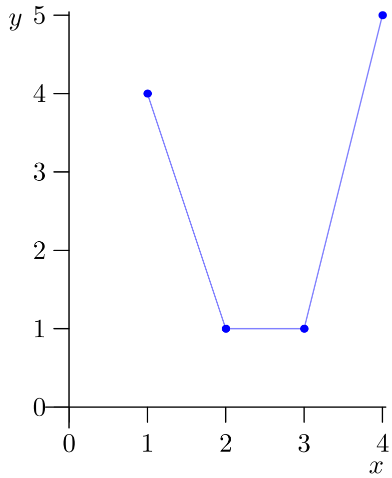


Abbildung 2.3.: Tabellarisch definierte Funktion und lineare Interpolation.

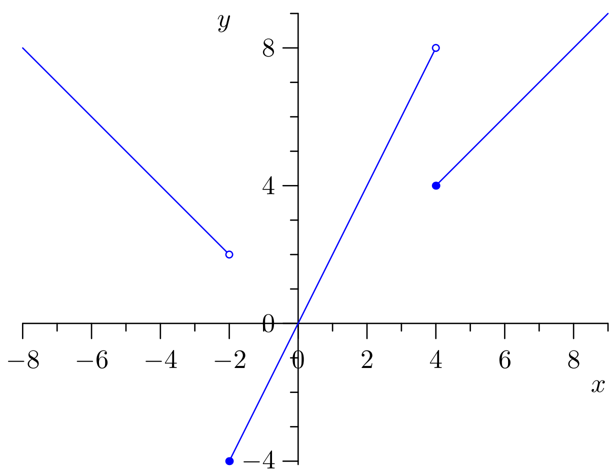


Abbildung 2.4.: Stückweise definierte Funktion.

Beispiel 2.1.4. Die Betragsfunktion ist ebenfalls eine stückweise definierte Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Definition 2.1.5 (Nullstelle). Die *Nullstellen* einer Funktion sind jene Werte im Definitionsbereich, die als Funktionswert 0 haben.

2.2. Eigenschaften von Funktionen

2.2.1. Monotonie

Definition 2.2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

- *streng monoton wachsend*, wenn für $x < y$ auch $f(x) < f(y)$ gilt. Analog heißt sie
- *streng monoton fallend*, wenn für $x < y$ gilt, dass $f(x) > f(y)$,
- *monoton wachsend*, wenn für $x < y$ gilt, dass $f(x) \leq f(y)$,
- *monoton fallend*, wenn für $x < y$ gilt, dass $f(x) \geq f(y)$.

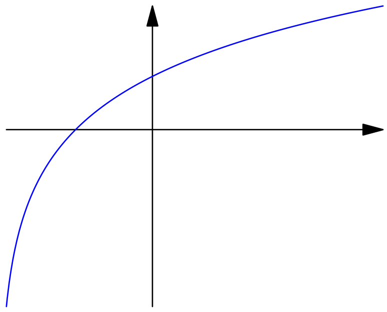
Siehe Abbildung 2.5 für eine Illustration der Begriffe. Bei „hübschen“ Funktionen kann man sich das Monotonieverhalten direkt rechnerisch überlegen.

Beispiel 2.2.2. Betrachte die Funktion
$$f(x) = x^3$$
(siehe Abbildung 2.6). Sei $x < y$. Unterscheide folgende Fälle:

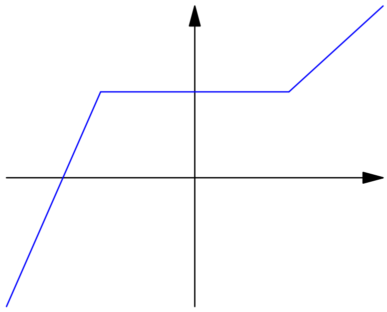
1. $y > x \geq 0$: Dann ist
$$f(y) - f(x) = y^3 - x^3 = \underbrace{(y-x)}_{>0} \underbrace{(\underbrace{y^2}_{>0} + \underbrace{xy}_{\geq 0} + \underbrace{x^2}_{\geq 0})}_{>0} > 0,$$
also $f(y) > f(x)$.
2. $x < y \leq 0$: Dann ist ebenfalls $xy \geq 0$, mit der gleichen Rechnung wie in Fall 1 erhalte also $f(y) > f(x)$.
3. $x < 0 < y$: Dann ist
$$f(x) = x^3 < 0 < y^3 = f(y).$$

Somit haben wir bewiesen, dass $f(x) = x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

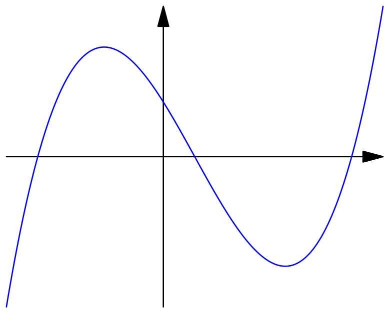
Bemerkung 2.2.3. Mit Differentialrechnung wird manches leichter (siehe später).



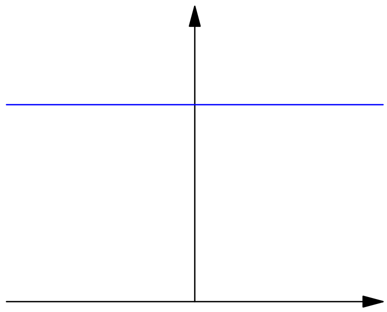
(a) streng monoton wachsend



(b) monoton wachsend



(c) nicht monoton; auf Teilintervallen streng monoton wachsend bzw. fallend



(d) monoton wachsend und monoton fallend (konstant)

Abbildung 2.5.: Monotonie von Funktionen.

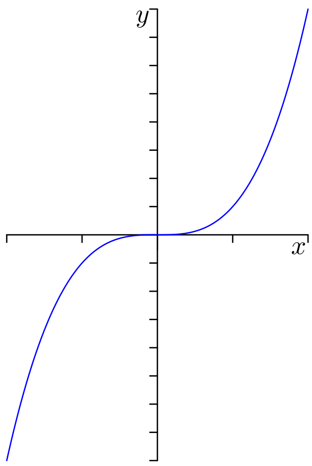


Abbildung 2.6.: Funktion $x \mapsto x^3$.

2.2.2. Beschränktheit

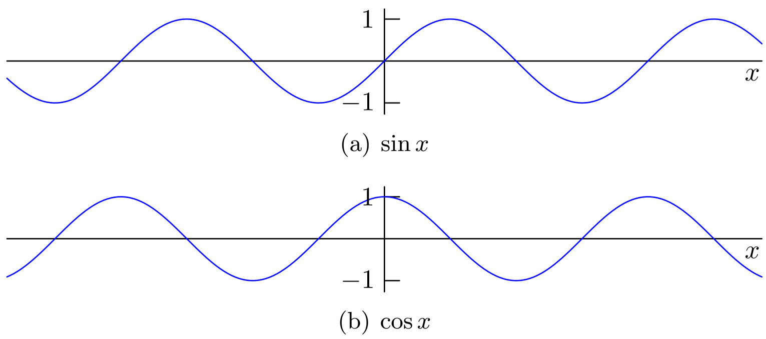
Definition 2.2.4. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante C gibt, sodass

$$|f(x)| \leq C \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Beispiele 2.2.5. Die Funktionen Sinus und Cosinus (siehe Abbildung 2.7) sind beschränkt, denn es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|\sin(x)| \leq 1 \qquad \text{und} \qquad |\cos(x)| \leq 1.$$



(a) $\sin x$

(b) $\cos x$

Abbildung 2.7.: Beschränktheit von Sinus und Cosinus.

Die Funktion $f(x) = x^2$ (siehe Abbildung 2.1) ist hingegen unbeschränkt. (Sie ist zwar *nach unten* durch 0 beschränkt, *nach oben* aber nicht.)

2.2.3. Symmetrie

Definition 2.2.6. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade Funktion* (oder *zur y-Achse symmetrische Funktion*), wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = f(x)$$

gilt. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade Funktion* (oder *zum Ursprung punktsymmetrische Funktion*), wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -f(x)$$

gilt.

Beispiele 2.2.7. Die Funktionen

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = -43, \quad f(x) = x^4, \quad f(x) = x^{2010}, \quad \cos(x)$$

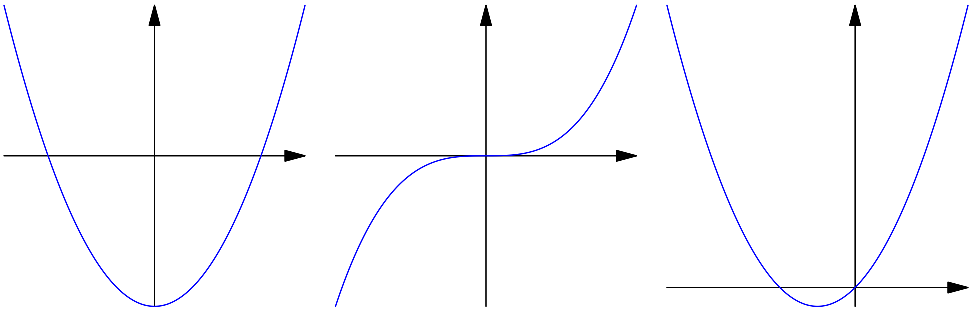


Abbildung 2.8.: Symmetrie von Funktionen.

sind gerade Funktionen. Die Funktionen

$$f(x) = x, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = x^{2009}, \quad \sin(x), \quad \tan(x), \quad \cot(x)$$

sind ungerade Funktionen. Die Funktion

$$f(x) = x^2 + x$$

ist weder gerade noch ungerade.

Siehe Abbildung 2.8 für eine Illustration der Symmetriebegriffe.

2.2.4. Periodizität

Definition 2.2.8. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *L-periodisch* (für ein $L > 0$), wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + L) = f(x)$$

gilt.

Beispiel 2.2.9. $\tan(x)$ ist π-periodisch:

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

$\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind 2π-periodisch.

2.2.5. Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Definition 2.2.10. Eine Funktion $f : D \to W$ heißt *injektiv*, wenn es für jedes $y \in W$ höchstens ein $x \in D$ gibt, sodass $f(x) = y$.

Beispiele 2.2.11.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ ist *nicht* injektiv, weil es z.B. für $y = 4$ zwei x-Werte, nämlich -2 und 2, gibt, sodass $f(x) = y$ gilt. Siehe Abbildung 2.9.

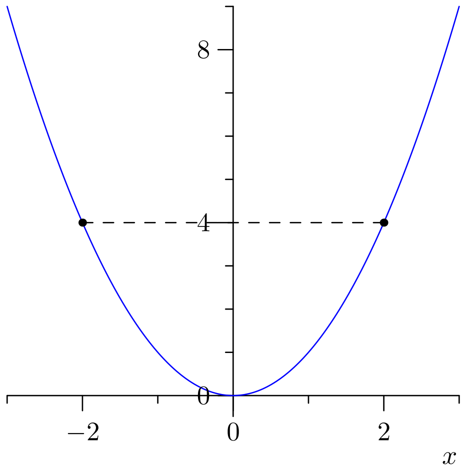


Abbildung 2.9.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv.

2. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R};\ f(x) = \frac{x+5}{x+2}$ (siehe Abbildung 2.10) ist injektiv:
   Wir betrachten die Gleichung $f(x) = y$ und wollen sie nach x auflösen. Wenn es für jedes y höchstens ein x gibt, sodass die Gleichung gilt, so ist die Funktion injektiv:
   $$\begin{aligned} && \frac{x+5}{x+2} &= y && \mid \cdot (x+2) \\ \Leftrightarrow && x+5 &= y(x+2) && \\ \Leftrightarrow && x+5 &= yx+2y && \mid -yx-5 \\ \Leftrightarrow && x-yx &= 2y-5 && \\ \Leftrightarrow && x(1-y) &= 2y-5 && \end{aligned}$$
   Für $y \neq 1$ kann nun durch $1-y$ dividieren und erhalte
   $$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{2y-5}{1-y},$$
   also einen eindeutigen Wert. Für $y = 1$ müsste
   $$\begin{aligned} && x \cdot 0 &= 2 \cdot 1 - 5 \\ \Leftrightarrow && 0 &= -3 \end{aligned}$$
   gelten, für dieses y gibt es also keine Lösung x.
3. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$ ist injektiv.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = 17$ ist *nicht* injektiv. Eine „Reparatur“ (Einschränkung des Definitionsbereichs) ist eher sinnlos, da die Funktion auf einen einzigen „Definitionswert“ eingeschränkt werden müsste, z.B. $f : \{21\} \to \mathbb{R};\ f(21) = 17$.

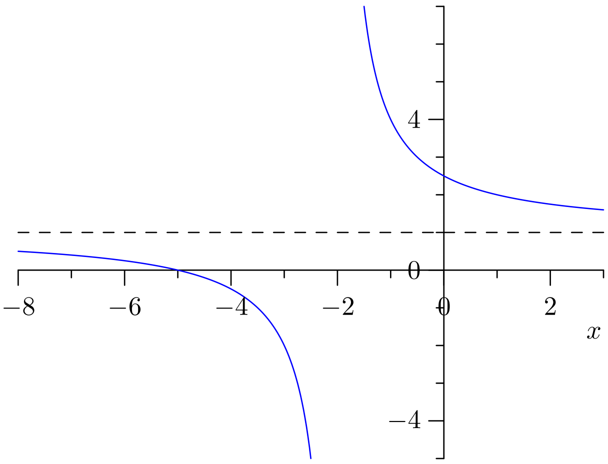


Abbildung 2.10.: $x \mapsto \frac{x+5}{x+2}$ ist injektiv.

Definition 2.2.12. Eine Funktion $f : D \to W$ heißt *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in W$ mindestens ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt.

Beispiele 2.2.13.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ ist *nicht* surjektiv, weil es z.B. für $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$ gibt.

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ wäre zwar surjektiv, ist aber *keine Funktion*, denn es gilt z.B.
$$f(1+i) = (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \notin \mathbb{R}.$$

3. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty); x \mapsto x^2$ ist eine surjektive Funktion.

4. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R};\ f(x) = \frac{x+5}{x+2}$ ist *nicht* surjektiv, weil $y = 1$ nicht erreicht wird (siehe Rechnung in Beispiel 2.2.11).

Definition 2.2.14. Eine Funktion $f : D \to W$, die injektiv und surjektiv ist, heißt *bijektiv*. Für jedes $y \in W$ gibt es also *genau ein* $x \in D$ mit $f(x) = y$.

Bemerkung 2.2.15. Anwenden einer auf $\mathbb{R}$ bijektiven Funktion auf eine Gleichung ist daher eine Äquivalenzumformung.

Beispiel 2.2.16. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\};\ f(x) = \frac{x+5}{x+2}$ ist bijektiv.

Sei $f : D \to W; x \mapsto f(x)$. Wir suchen eine *Umkehrfunktion* $f^{-1} : W \to D$, sodass $f(x) = y$ gleichbedeutend mit $x = f^{-1}(y)$ ist (siehe Abbildung 2.11).

Beispiel 2.2.17. Betrachte $f : [0, \infty) \to [0, \infty);\ f(x) = x^2$. Wir sehen
$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 && \Rightarrow && f^{-1}(0) = 0,\\
f(1) &= 1 && \Rightarrow && f^{-1}(1) = 1,\\
f(2) &= 4 && \Rightarrow && f^{-1}(4) = 2,\\
f(3) &= 9 && \Rightarrow && f^{-1}(9) = 3,
\end{aligned}$$

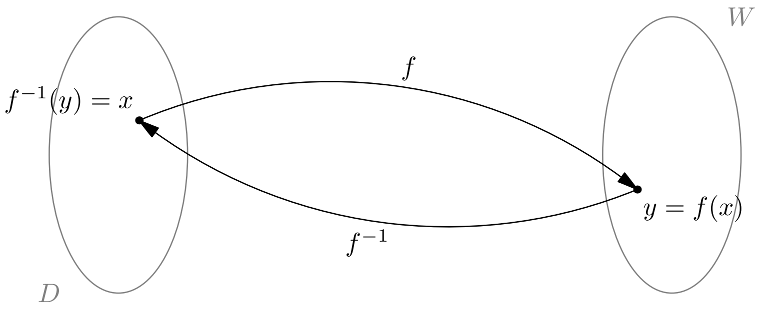


Abbildung 2.11.: Umkehrfunktion f^{-1} zu f.

also

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Würde man Definitions- und Wertemenge allerdings ändern in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$, hätte man ein Problem mit der Eindeutigkeit der Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned}
f(1) = f(-1) = 1 \qquad &\Rightarrow \qquad f^{-1}(1) = 1 \text{ oder } -1,\\
f(2) = f(-2) = 4 \qquad &\Rightarrow \qquad f^{-1}(4) = 2 \text{ oder } -2,\\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

Außerdem gibt es z.B. für $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$, also keinen Funktionswert für $f^{-1}(-1)$. Es gibt somit jedenfalls keine Umkehrfunktion. Oben haben wir gesehen, dass man durch Einschränkung von Definitions- und Wertemenge eine Umkehrfunktion zu $x \mapsto x^2$ finden kann.

Bemerkung 2.2.18. Eine Funktion $f : D \to W$ besitzt genau dann eine Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$, wenn f bijektiv ist.

Geometrische Interpretation Der Graph der Umkehrabbildung ist der an der *ersten Mediane* (Gerade $y = x$) gespiegelte Graph der ursprünglichen Abbildung (siehe Abbildung 2.12).

Wenn man den Graphen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ betrachtet, sieht man, dass die $x < 0$ keine entsprechenden y-Werte der Umkehrfunktion haben, während sich die $x > 0$ zwischen zwei y-Werten entscheiden können.

Beispiel 2.2.19. Suche die Umkehrabbildung von

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\};\ f(x) = \frac{x+5}{x+2}.$$

Sei

$$y = f(x) = \frac{x+5}{x+2}.$$

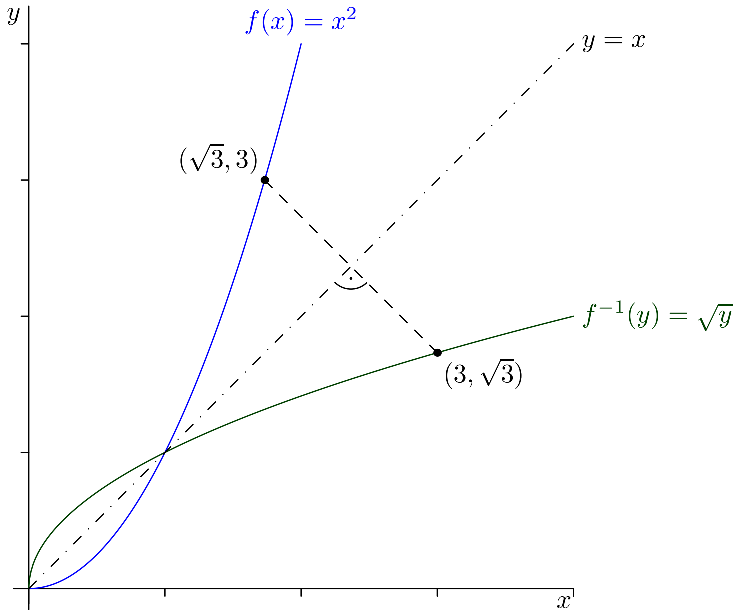


Abbildung 2.12.: Die Umkehrfunktion ist die an der 1. Mediane gespiegelte Funktion.

Wir suchen $x = f^{-1}(y)$, müssen also in dieser Gleichung x explizit ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
& & y &= \frac{x+5}{x+2} & & \mid \cdot (x+2) \\
&\Leftrightarrow & y(x+2) &= x+5 & & \mid -x-2y \\
&\Leftrightarrow & yx - x &= -2y+5 & & \mid : (y-1) \neq 0, \text{ weil } y \neq 1 \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{-2y+5}{y-1} & &
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$x = f^{-1}(y) = \frac{-2y+5}{y-1}.$$

Es fällt auf, dass das die gleiche Rechnung war wie bei der Bestimmung, ob die Funktion injektiv ist (siehe Beispiel 2.2.11).

Die Buchstaben in der Funktionsdarstellung können natürlich beliebig verändert werden, also z.B.

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x+5}{x-1}.$$

Das macht nur einen „psychologischen Unterschied“.

2.3. Grenzwerte und Stetigkeit

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [-\infty, \infty]$. Wir sagen, dass der *Grenzwert* (*Limes*) von $f(x)$ für x gegen x_0 gleich y_0 sei, wenn sich $f(x)$ an y_0 annähert, wenn sich x an x_0 annähert.

Schreibe
$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Beispiel 2.3.1. Betrachte $f : (0,\infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Es gilt
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$
(„Im Unendlichen strebt $f(x)$ gegen 1.“)

Wie formuliert man so etwas „sauber“?

Definition 2.3.2 (Grenzwert). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$. Wir sagen
$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x),$$
wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Das lässt sich auf $x_0 = \pm\infty$ ausdehnen, indem man statt $|x - x_0| < \delta$ die Bedingung $x > K$ bzw. $x < -K$ (K groß) fordert.

Weiters sagt man
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,$$
wenn es für jedes $L > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, dass $f(x) > L$ bzw. $f(x) < -L$.

Definition 2.3.3.

1. Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, sagt man $f(x)$ *konvergiert* für $x \to x_0$ gegen y_0.
2. Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und endlich ist, sagt man $f(x)$ ist für $x \to x_0$ *konvergent.*
3. Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nicht existiert, sagt man $f(x)$ ist für $x \to x_0$ *divergent.*
4. Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und $\pm\infty$ ist, sagt man $f(x)$ ist für $x \to x_0$ *bestimmt divergent.*

Für uns wichtig ist folgender

Satz 2.1 (Grenzwertsätze). Seien f, g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, $x_0 \in [-\infty,\infty]$. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren und seien endlich.

1. Es existiert auch $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x))$ und es gilt
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$
2. Es existiert auch $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x))$ und es gilt
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

3. Wenn zusätzlich $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ gilt, existiert auch $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$
4. Wenn $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)$, dann gilt auch
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x).$$
(„Einzwicksatz“, „Sandwich-Theorem“)

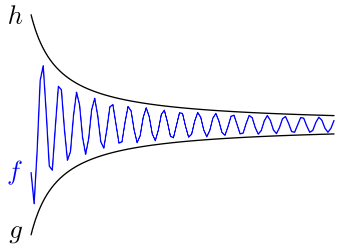


Abbildung 2.13.: Einzwicksatz.

Wenn $f(x) \geq g(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, dann gilt auch
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$
5. Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $g(x)$ eine beschränkte Funktion ist, so gilt
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Beweis. Um die Aussagen 1 bis 4 zu beweisen, muss man mit δ und ε „spielen“ (hier leider nicht).

Wir beweisen Aussage 5: Wenn $|g(x)| \leq C$ für alle x gilt, so folgt
$$-C \cdot |f(x)| \leq f(x) \cdot g(x) \leq C \cdot |f(x)|.$$
Es gilt
$$\lim_{x\to x_0} C \cdot |f(x)| = \underbrace{\lim_{x\to x_0} C}_{=C} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} |f(x)|}_{=0} = C \cdot 0 = 0.$$
Analog gilt für $-C$ statt C
$$\lim_{x\to x_0} -C \cdot |f(x)| = \underbrace{\lim_{x\to x_0} -C}_{=-C} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} |f(x)|}_{=0} = -C \cdot 0 = 0.$$
Mit dem Einzwicksatz folgt nun die gewünschte Aussage
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0.$$
□

Wenn einer der Grenzwerte unendlich ist, etwa $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, so können ebenfalls noch Aussagen getroffen werden:

Proposition 2.3.4. Seien $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [-\infty, +\infty]$, es sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ und es existiere $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

1. Wenn $\lim_{x\to x_0} g(x) > -\infty$, so folgt $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = +\infty$.
2. Wenn $\lim_{x\to x_0} g(x) > 0$, so folgt $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$.
3. Es gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
4. Wenn $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ und $g(x) > 0$ für alle x, so gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$.

Bemerkung 2.3.5. „Erlaubt“ sind also folgende arithmetischen Operationen mit ∞:

Addition und Subtraktion von Konstanten:	$\infty + 23 = \infty,$	$\infty - 23 = \infty,$
Multiplikation mit Konstanten $\neq 0$:	$25 \cdot \infty = \infty,$	$\dfrac{1}{17} \cdot \infty = \infty,$
Division durch Unendlich:	$\dfrac{25}{\infty} = 0,$	$\dfrac{13}{-\infty} = 0,$
Division einer Konstante $\neq 0$ durch 0:	$\dfrac{1}{+0} = \infty,$	$\dfrac{1}{-0} = -\infty.$

Bei der Division durch 0 ist insbesondere zu beachten, dass das Vorzeichen des Ergebnisses ($+\infty$ bzw. $-\infty$) davon abhängt, ob sich der Nenner von der positiven oder von der negativen Seite an 0 annähert.

Definitiv verboten ist hingegen die unmittelbare Auswertung folgender *unbestimmter Ausdrücke*:

$$\frac{\infty}{\infty}, \qquad \infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{0}{0}.$$

Beispiel 2.3.6. Betrachte $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R};\ f(x) = \frac{x+5}{x+2}$. In einem ersten Versuch könnte man folgendermaßen rechnen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x+2} = \frac{\lim_{x\to\infty} x + 5}{\lim_{x\to\infty} x + 2} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Das ist ein unbestimmter Ausdruck, so lässt sich das Ergebnis also nicht bestimmen. Von vorne beginnend, können wir den Trick anwenden, den Bruch mit $\frac{1}{x}$ zu erweitern, also Zähler und Nenner durch x zu dividieren (der Wert des Bruchs wird dadruch natürlich nicht verändert):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x}}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}} \\
&= \frac{1 + \lim_{x\to\infty} 5 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{1 + \lim_{x\to\infty} 2 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1+5\cdot 0}{1+2\cdot 0} = \frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.3.7. Sind Zähler und Nenner Polynome vom gleichen Grad, ist es sinnvoll, beide durch die höchste auftretende Potenz zu dividieren:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+7x+10}{x^2+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Beispiel 2.3.8. Wenn Zähler und Nenner Polynome unterschiedlichen Grades sind, kann man Zähler und Nenner entweder durch die höchste Potenz im Zähler oder durch die höchste Potenz im Nenner dividieren:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{25x^2+7}{2x+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{25x+\frac{7}{x}}{2+\frac{9}{x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(25x+\frac{7}{x}\right) = \frac{1}{2}\infty = \infty$$

bzw.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{25x^2+7}{2x+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{25+\frac{7}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}} = \frac{25}{+0} = \infty.$$

Beispiel 2.3.9. Für $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ existiert kein Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} f(x).$$

Es handelt sich um eine Oszillation, die zum Ursprung hin immer stärker wird (siehe Abbildung 2.14).

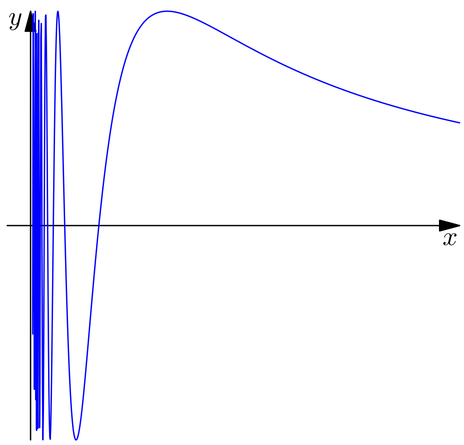


Abbildung 2.14.: Funktion $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$.

$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ hat hingegen einen Grenzwert für $x \to 0$. Da $\sin\frac{1}{x}$ beschränkt durch 1 ist, folgt aus den Grenzwertsätzen (Satz 2.1, Teil 5)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Beispiel 2.3.10. Berechne den Grenzwert von

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 27} - \sqrt{x^2 - 5x + 10}$$

für $x \to \infty$.

Der direkte Weg schlägt fehl:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + x + 27} - \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 10} = \infty - \infty,$$

ein unbestimmter Ausdruck. Der Trick bei Summen bzw. Differenzen von Wurzeln ist oft, mit der Differenz bzw. Summe der Wurzeln zu „erweitern“ und dabei die Formel $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ auszunutzen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 27} - \sqrt{x^2 - 5x + 10}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 27} + \sqrt{x^2 - 5x + 10}}{\sqrt{x^2 + x + 27} + \sqrt{x^2 - 5x + 10}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 + x + 27) - (x^2 - 5x + 10)}{\sqrt{x^2 + x + 27} + \sqrt{x^2 - 5x + 10}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x + 17}{\sqrt{x^2 + x + 27} + \sqrt{x^2 - 5x + 10}}.
\end{aligned}$$

Würde man hier direkt den Grenzübergang in Zähler und Nenner machen, erhielte man wieder einen unbestimmten Ausdruck, $\frac{\infty}{\infty}$. Stattdessen dividieren wir Zähler und Nenner durch x:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6 + \frac{17}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{27}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2}}} \\
&= \frac{6}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{6}{1 + 1} = 3.
\end{aligned}$$

Links- und rechtsseitige Grenzwerte Wenn man die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ (siehe Abbildung 2.25) betrachtet, sieht man, dass sich der Grenzwert von f im Punkt 0 unterscheidet je nach dem, ob man sich von links oder von rechts annähert. Bei Annäherung von rechts erhält man

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

bei Annäherung von links

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Im Allgemeinen bezeichnet also

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ bei Annhäherung von rechts, also mit $x > x_0$ (*rechtsseitiger Grenzwert*), und

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ bei Annhäherung von links, also mit $x < x_0$ (*linksseitiger Grenzwert*).

Wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert in x_0 existieren und gleich sind, so konvergiert $f(x)$ für $x \to x_0$ gegen genau diesen Wert.

Beispiel 2.3.11. Betrachte
$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$
(x abgerundet auf die nächste ganze Zahl; siehe Abbildung 2.15).

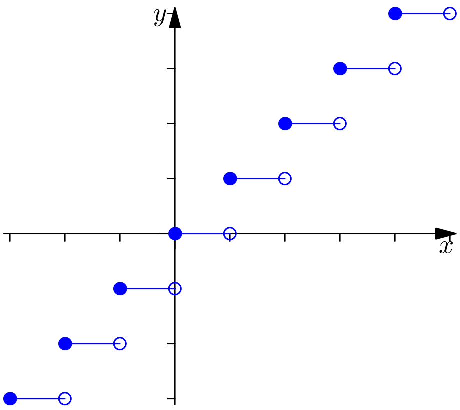


Abbildung 2.15.: Funktion $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Hier gilt z.B.
$$\lim_{x \to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2,$$
aber
$$\lim_{x \to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1.$$
$f(x)$ besitzt also für $x \to 2$ keinen Grenzwert.

Definition 2.3.12 (Stetigkeit). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Beispiel 2.3.13. Betrachte $f(x) = x^2 + x + 17$ in $x_0 = 2$. Es gilt
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 17 = 4 + 2 + 17 = 23 = f(2).$$
f ist also stetig im Punkt 2.

ad Beispiel 2.3.11. Da links- und rechtsseitiger Grenzwert für $x \to 2$ nicht übereinstimmen, ist $f(x)$ für $x \to 2$ nicht konvergent und daher erst recht nicht stetig („unstetig bei $x = 2$“).

Beispiel 2.3.14. Untersuche die stückweise definierte Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R};\; f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 5 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $x = 1$ (siehe Abbildung 2.16).

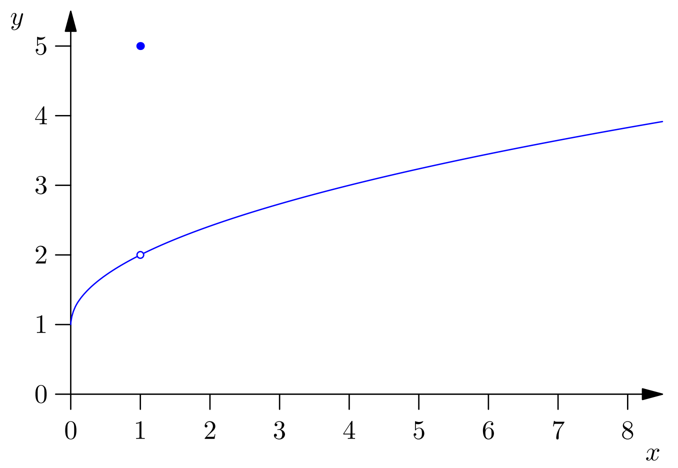


Abbildung 2.16.: Funktion aus Beispiel 2.3.14.

Direkter Grenzwertübergang $x \to 1$ für Zähler und Nenner in $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ würde auf den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ führen. Es hilft wieder der „Trick“ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) \\ &= \sqrt{1} + 1 = 2. \end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert also und ist 2, der Funktionswert für $x = 1$ ist allerdings 5, somit ist die Funktion in $x = 1$ unstetig.

Definition 2.3.15. Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$. Wenn f stetig in jedem Punkt $x_0 \in I$ ist, heißt f *stetig auf I*.

Satz 2.2 (Verknüpfung stetiger Funktionen). Seien f, g Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, f sei stetig in x_0 und g sei stetig in x_0. Dann sind auch

$$f + g, \qquad f - g, \qquad f \cdot g$$

stetig in x_0. Wenn $g(x_0) \neq 0$ gilt, so ist auch

$$\frac{f}{g}$$

stetig in x_0. Wenn $f(x)$ stetig im Punkt $g(x_0)$ ist, so ist auch

$$h(x) = f(g(x))$$

stetig in x_0.

Beweis. Aufgrund der Stetigkeit von f und g wissen wir, dass

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

gilt. Dann folgt aus den Grenzwertsätzen

$$\lim_{x \to x_0} (f(g) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0),$$

also die gewünschte Bedingung für die Stetigkeit von $f + g$. Analog erhält man die Aussagen für $f - g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$.

Weiters gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to g(x_0)} f(y) = f(g(x_0)),$$

weil sich $g(x)$ für $x \to x_0$ an $g(x_0)$ annähert. □

Bemerkung 2.3.16. Dieser Satz erlaubt es, anhand weniger bekannter stetiger Funktionen viele Funktionen als stetig zu erkennen, z.B. die stückweise definierte Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 5 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

aus Beispiel 2.3.14: Wir wissen, dass die Funktionen 1, x, $\sqrt{x}$ (siehe Bemerkung 2.3.17) stetig sind. Daher ist auch

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

stetig in all jenen Punkten, wo $\sqrt{x} - 1 \neq 0$, also $\sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$. Somit ist $f(x)$ stetig für $x \neq 1$ und gemäß Rechnung in Beispiel 2.3.14 unstetig für $x = 1$.

Satz 2.3 (Umkehrung streng monotoner, stetiger Funktionen). Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann besitzt f eine Umkehrfunktion (auf der „richtigen“ Wertemenge); diese ist wieder stetig und streng monoton.

Beweis. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass f streng monoton wachsend ist. Wenn $x_1 < x_2$, so folgt $f(x_1) < f(x_2)$. Dadurch ist f sicher injektiv (kein y-Wert kann mehrfach erreicht werden). Für geeignetes $W \subseteq \mathbb{R}$ ist dann $f : I \to W$ auch surjektiv. Also gibt es eine Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W \to I.$$

Wenn $y_1 < y_2$ und $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$, so gilt $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$. Wegen $f(x_1) < f(x_2)$ muss also $x_1 < x_2$ gelten.

Für die Stetigkeit von f^{-1} müsste man etwas mehr arbeiten. □

Bemerkung 2.3.17. Damit wissen wir jetzt auch offiziell, dass $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist, da es die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$ ist. Die Funktion $x \mapsto x$ ist stetig, also ist $x^2 = x \cdot x$ stetig, und x^2 ist streng monoton wachsend.

Satz 2.4 (Nullstellensatz). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b \in I$. Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt, so gibt es eine Nullstelle x_0 von f mit $a < x_0 < b$.

Beweisskizze. Wähle x_0 „maximal“, sodass

$$f(x_0) \leq 0.$$

Es kann nicht sein, dass $f(x_0) < 0$, weil

$$\lim_{x \to x_0^+} \underbrace{f(x)}_{>0} = f(x_0)$$

aufgrund der Stetigkeit von f. Daraus folgt $f(x_0) = 0$. □

Bemerkung 2.3.18. Eine stetige Funktion kann man sich daher als Funktion vorstellen, die nie „hüpft“; man ihren Graphen also ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann.

2.4. Elementare Funktionen

2.4.1. Konstante Funktionen

Definition 2.4.1. *Konstante Funktionen* sind Funktionen der Form

$$f(x) = C$$

mit einer Konstanten C.

Konstante Funktionen sind natürlich stetig.

2.4.2. Lineare Funktionen

Definition 2.4.2. *Lineare Funktionen* sind Funktionen der Form

$$f(x) = kx + d,$$

wobei k, d Konstanten sind.

Lineare Funktionen beschreiben Geraden im $\mathbb{R}^2$. Der Wert von d ergibt sich einfach als

$$d = f(0).$$

Für $x_1 \neq x_2$ und $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ erhält man

$$\begin{aligned} y_1 &= kx_1 + d, \\ y_2 &= kx_2 + d, \end{aligned}$$

und durch Multiplizieren der ersten Gleichung mit (-1) und anschließendem Addieren

$$\begin{aligned} && y_2 - y_1 &= kx_2 - kx_1 \\ \Leftrightarrow && k &= \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1}. \end{aligned}$$

Dies kann man sich graphisch als

$$k = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan \alpha$$

vorstellen. k gibt an, um wie viel sich $f(x)$ ändert, wenn wir x um 1 erhöhen, also die *Steigung* der Geraden. Somit ist α der *Steigungswinkel* der Geraden. Siehe Abbildung 2.17.

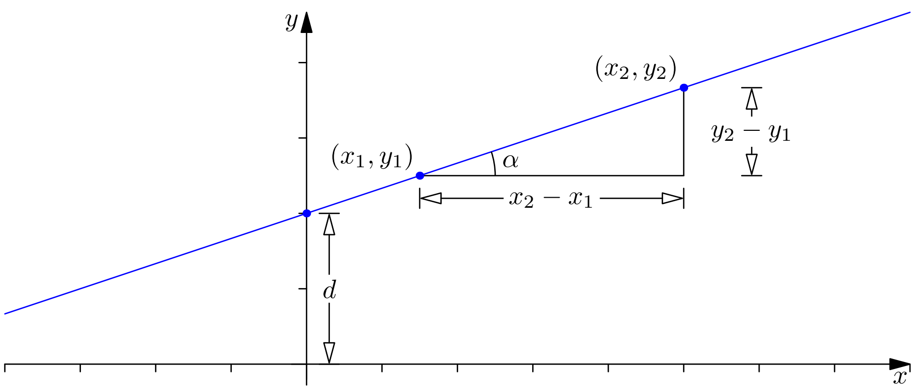


Abbildung 2.17.: Lineare Funktion (Gerade).

Besonders nett ist der Fall $d = 0$, wo die Funktion $y = kx$ eine Gerade durch den Ursprung beschreibt. Dann ist das Verhältnis $y : x = k$ auf der ganzen Geraden konstant. Wenn also (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf der Geraden liegen, folgt

$$k = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{und} \quad y_2 = k \cdot x_2,$$

also

$$y_2 = \frac{y_1}{x_1} \cdot x_2.$$

Dies kann man als einfache *Schlussrechnung* („Dreisatz“) bei direkter Proportionalität auffassen.

2.4.3. Quadratische Funktionen

Definition 2.4.3. *Quadratische Funktionen* sind Funktionen der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit Konstanten $a \neq 0$, b, c.

Wir führen das durch quadratisches Ergänzen – mehr oder weniger – auf die Funktion $g(x) = x^2$ zurück:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right). \end{aligned}$$

Der Term $x + \frac{b}{2a}$ signalisiert, dass f eine *verschobene* Variante von g ist. Das Minimum ist jetzt somit bei $x = -\frac{b}{2a}$. Die Multiplikation mit a drückt eine *Skalierung* aus, und die additive Konstante $c - \frac{b^2}{4a}$ eine *Verschiebung* in y-Richtung.

Das Merken dieser Formeln ist allerdings nicht sinnvoll.

Beispiel 2.4.4. Betrachte die quadratische Funktion

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 11.$$

Quadratisches Ergänzen liefert

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 5x + 11 \\ &= 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) + 11 \\ &= 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right) + 11 \\ &= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{63}{8}. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um die Funktion $g(x) = x^2$, die um $-\frac{5}{4}$ in x-Richtung und um $\frac{63}{8}$ in y-Richtung verschoben und um den Faktor 2 in y-Richtung skaliert (gestreckt) ist (siehe Abbildung 2.18). Der Graph beschreibt daher eine nach oben offene Parabel mit *Scheitelpunkt* bei $\left(-\frac{5}{4}, \frac{63}{8}\right)$.

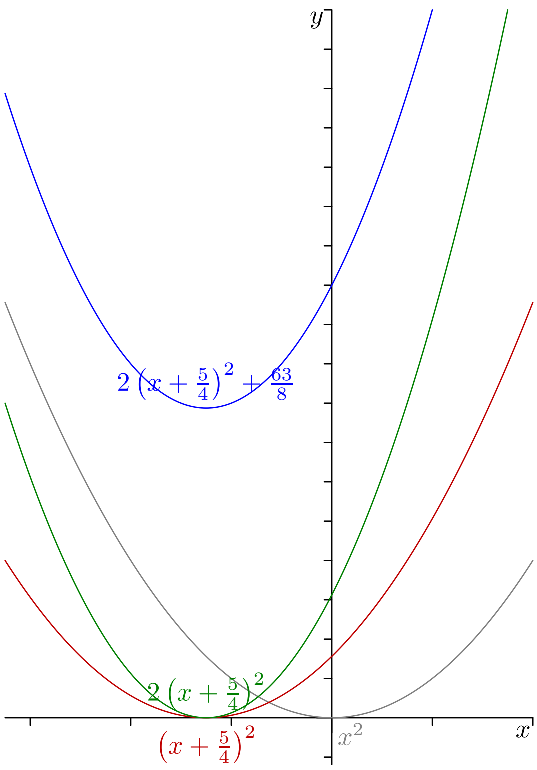


Abbildung 2.18.: Quadratische Funktion $f(x) = 2x^2 + 5x + 11$.

2.4.4. Allgemeine Potenzfunktionen

Betrachte die Funktion

$$f(x) = x^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Wenn n ungerade ist, gilt

$$f(-x) = (-x)^n = -x^n,$$

es handelt sich dann also um eine ungerade Funktion auf $\mathbb{R}$. Weiters ist f streng monoton wachsend und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^n = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty.$$

Daher ist f bijektiv von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Als Produkt $x^n = x \cdot x \cdots x$ stetiger Funktionen ist sie außerdem stetig. Die Umkehrfunktion $\sqrt[n]{x}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend, stetig und bijektiv von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siehe Abbildung 2.19(a).

Wenn n gerade ist, gilt

$$f(-x) = (-x)^n = x^n,$$

es handelt sich dann also um eine gerade Funktion. Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}$ und es gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie ist weiters streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$. Als Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist f weder injektiv noch surjektiv. Die Einschränkung auf

$$[0, \infty) \to [0, \infty)$$

ist allerdings bijektiv. Die Umkehrfunktion $\sqrt[n]{x}$ von $[0, \infty) \to [0, \infty)$ ist streng monoton wachsend, bijektiv und stetig. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^n = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty.$$

Siehe Abbildung 2.19(b).

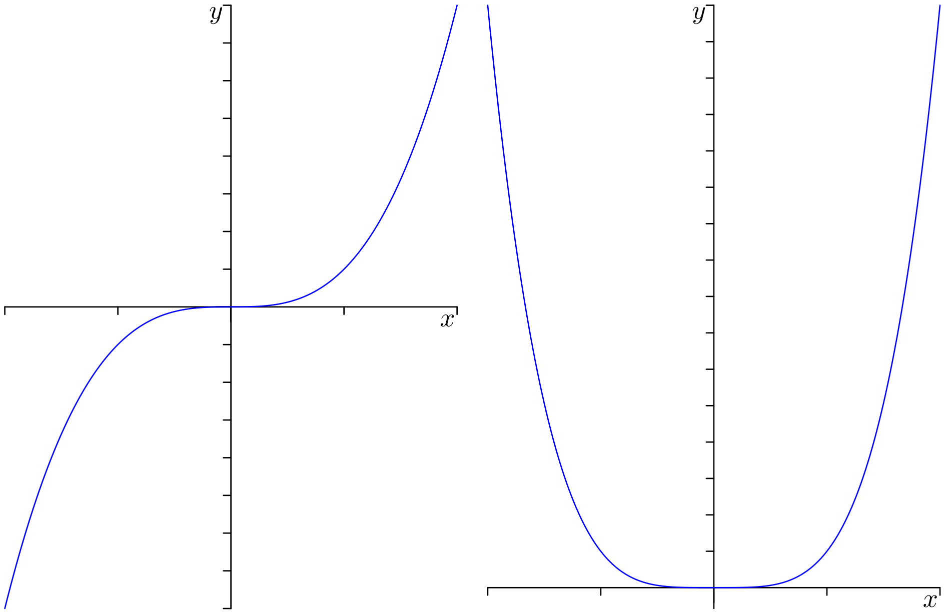
2.4.5. Polynomfunktionen

Definition 2.4.5. Eine *Polynomfunktion* ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d,$$

wobei a_i, $0 \leq i \leq d$, konstant sind und $a_d \neq 0$.

Polynomfunktionen sind stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen. Alle weiteren Eigenschaften sind von Fall zu Fall zu untersuchen.



(a) x^3 (ungerade)

(b) x^4 (gerade)

Abbildung 2.19.: Allgemeine Potenzfunktionen.

2.4.6. Die Funktion $\frac{1}{x}$

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$. Es gilt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Siehe Abbildung 2.20.

f ist bijektiv, die Umkehrfunktion ergibt sich aus

$$\begin{aligned} & y = \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist also ihre eigene Umkehrfunktion.

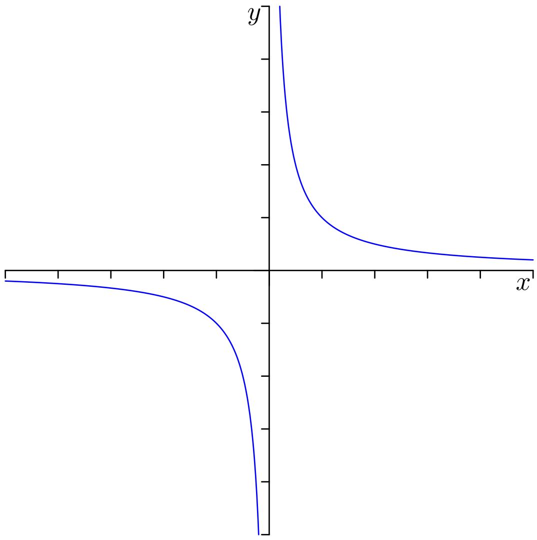


Abbildung 2.20.: Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.4.7. Rationale Funktionen

Definition 2.4.6. Eine *rationale Funktion* ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind.

Beispiel 2.4.7. Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 5}{x + 2}$$

ist eine rationale Funktion.

Die Definitionsmenge einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\alpha \mid \alpha \text{ ist Nullstelle von } q\}.$$

f ist stetig auf der gesamten Definitionsmenge.

Definition 2.4.8. Wenn α eine Nullstelle des Nenners, aber keine Nullstelle des Zählers ist, so heißt α ein *Pol* von f.

Für einen Pol α von f gilt

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to \alpha^-} f(x) = \pm\infty.$$

Polynomdivision erlaubt manchmal mehr Einsicht:

ad Beispiel 2.4.7.

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^2 \;\; + x + 5\big) : \big(x+2\big) = x - 1 + \dfrac{7}{x+2} \\
\underline{\;- x^2 - 2x\;} \\
\qquad\quad - x + 5 \\
\qquad\quad\;\; \underline{\;x + 2\;} \\
\qquad\qquad\quad 7
\end{array}
$$

Bei der Funktion $\frac{7}{x+2}$ handelt es sich um eine Verschiebung um -2 in x-Richtung und eine Streckung mit dem Faktor 7 der Funktion $\frac{1}{x}$ (siehe Abbildung 2.21).

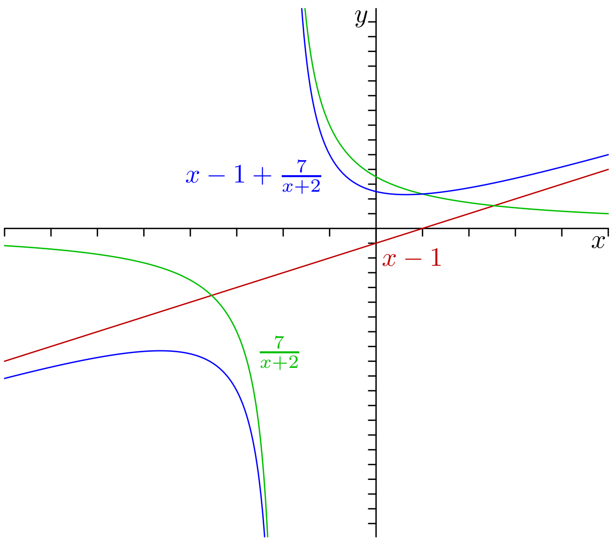


Abbildung 2.21.: Funktion $f(x) = x - 1 + \frac{7}{x+2}$.

Bemerkung 2.4.9. Kennt man die Partialbruchzerlegung, so versteht man noch mehr.

2.4.8. Exponentialfunktion

Definition 2.4.10. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann definiere die *Exponentialfunktion* exp als

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots .$$

Bemerkung 2.4.11. Da $n!$ schneller als x^n für festes x wächst, werden die Summanden schließlich sehr klein. Zum Beispiel gilt für $x = 2$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \geq 3 \cdot 3 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3^{n-2},$$

also
$$\frac{2^n}{n!} \le \frac{2^n}{2\cdot 3^{n-2}} = 3\cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$
Damit kann die Summe in der Definition von exp(2) mit dem Dreifachen der geometrischen Reihe
$$1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \le \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$
(vgl. (1.7) mit $a=1$, $b=\frac{2}{3}$) nach oben hin abgeschätzt werden, d.h.
$$\exp(2) \le 3\cdot 3 = 9.$$
Ähnlich kann man exp(1) abschätzen:
$$\begin{aligned}\exp(1) &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\cdots\\ &\le 1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots}_{=2} = 3,\end{aligned}$$
bzw.
$$\exp(1) \ge 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24} = 2.5+0.16+0.04 = 2.7.$$
Wenn man das genauer macht, erhält man
$$\exp(1) = 2.71828\ldots.$$
Bemerkung 2.4.12. Ein anderer Zugang wären folgende Verzinsungssysteme:

- Bank 1 verzinst jährlich. Bei einem Startkapital von €1 und einem Zinssatz von x hat man am Ende des Jahres also €$1+x$.
- Bank 2 verzinst halbjährlich mit einem Zinssatz von jeweils $\frac{x}{2}$. Nach einem Jahr hat man dann
$$\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right) = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1+x+\frac{x^2}{4}.$$
- Bank 3 verzinst dritteljährlich bei einem Zinssatz von jeweils $\frac{x}{3}$. Nach einem Jahr hat man dann
$$\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right) = \left(1+\frac{x}{3}\right)^3 = 1+x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{27}.$$
- Setzt man das fort, landet man bei der „Bank ∞“, wo man nach einem Jahr
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$$
hat, wie wir später sehen werden.

  Für den utopischen Fall von 100% Zinsen, d.h. $x=1$, hätte man mit €1 Startkapital bei der Bank ∞ also nach einem Jahr €2.71828....

Satz 2.5 (Eigenschaften der Exponentialfunktion). Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften.

1. Für $x > 0$ gilt $\exp(x) > 1$.
2. Für x, $y \in \mathbb{R}$ gilt
$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$
3. $\exp(0) = 1$.
4. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
5. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$.
6. Für r, $s \in \mathbb{N}$ gilt
$$\exp\left(\frac{r}{s}\right) = \sqrt[s]{\exp(1)^r}.$$
7. $\exp(x)$ ist eine streng monoton wachsende, stetige Funktion.
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

Beweis. 1. Für $x > 0$ gilt
$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots > 1.$$

2. Es gilt
$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k y^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k y^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\right) = \exp(x) \cdot \exp(y).\end{aligned}$$

3. $\exp(0) = 1 + 0 + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{6} + \cdots = 1$.

4. Es gilt laut 2.
$$\exp(-x) \cdot \exp(x) = \exp(-x + x) = \exp(0) = 1,$$
woraus unmittelbar $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ folgt.

5. Für $x < 0$ wissen wir, dass $\exp(x) > 1 > 0$ gilt.
Für $x < 0$ gilt $-x > 0$ und somit
$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0.$$

6. Es gilt

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{r}{s}\right)^s &= \underbrace{\exp\left(\frac{r}{s}\right)\cdot\exp\left(\frac{r}{s}\right)\cdots\exp\left(\frac{r}{s}\right)}_{s \text{ Faktoren}} = \exp\Bigg(\underbrace{\frac{r}{s}+\frac{r}{s}+\cdots+\frac{r}{s}}_{s \text{ Summanden}}\Bigg)\\ &= \exp(r) = \exp(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{r \text{ Summanden}}) = \underbrace{\exp(1)\cdot\exp(1)\cdots\exp(1)}_{r \text{ Faktoren}}\\ &= (\exp(1))^r\end{aligned}$$

und daher

$$\exp\left(\frac{r}{s}\right) = \exp(1)^{\frac{r}{s}}.$$

7. Sei $x < y$. Dann gilt

$$\exp(y) = \exp(x+(y-x)) = \underbrace{\exp(x)}_{>0}\underbrace{\exp(\underbrace{y-x}_{>0})}_{>1} > \exp(x).$$

Da $\frac{x^n}{n!}$ stetig ist und unter gewissen Voraussetzungen, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, die unendliche Summe stetiger Funktionen stetig ist, ist

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

stetig.

8. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots\right)-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\cdots\right) = 1.\end{aligned}$$

□

Definition 2.4.13. Definiere die *Eulersche Zahl* als

$$e := \exp(1).$$

Schreibe statt $\exp(x)$ auch e^x.

Bemerkung 2.4.14. Laut 6. gilt

$$\exp\left(\frac{r}{s}\right) = \sqrt[s]{e^r} = e^{\frac{r}{s}}.$$

Für rationale x ist also $\exp(x)$ wirklich dasselbe wie e^x im klassischen Sinne. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion passt das mit reellen x auch zusammen.

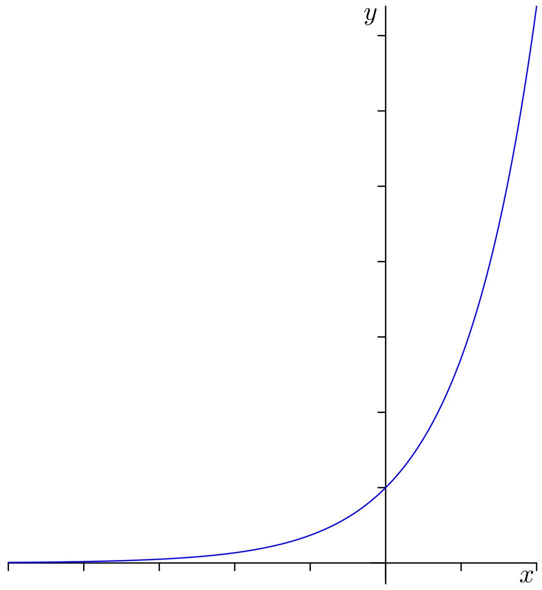


Abbildung 2.22.: Die Exponentialfunktion $\exp(x)$.

Proposition 2.4.15. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x^n}} = 0.$$

BEWEIS. Es gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

und daher

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{x^n(n+1)!} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(n+1)!} = \infty,$$

da $(n+1)!$ konstant bzgl. x ist.

Weiters gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{e^{-x}}}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{e^{-x}}{x^n}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{(-y)^n}} = (-1)^n \frac{1}{\lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^n}} = 0. \qquad \square$$

2.4.9. Natürlicher Logarithmus

Da die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv, streng monoton wachsend und stetig ist, besitzt sie dort eine bijektive, streng monoton wachsende, stetige Umkehrfunktion.

Definition 2.4.16. Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus*,

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Satz 2.6 (Eigenschaften des natürlichen Logarithmus). Der natürliche Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine stetige, bijektive, streng monoton wachsende Funktion, für die gilt:

1. $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$.
2. $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$,
   $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$,
   $\ln\left(x^n\right) = n \ln x$.
3. $\ln(1) = 0$.
4. $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$,
   $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Beweis. 1. folgt direkt aus der Tatsache, dass ln die Umkehrfunktion von exp ist.

2. Sei $a = \ln x$, $b = \ln y$, also $x = e^x$, $y = e^b$ und somit

$$x \cdot y = e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

Das bedeutet

$$\ln(x \cdot y) = a + b = \ln x + \ln y.$$

Weiters gilt

$$x^n = (e^a)^n = e^{a \cdot n},$$

also

$$\ln\left(x^n\right) = a \cdot n = n \cdot \ln x.$$

Schließlich gilt mit $\ln \frac{1}{x} = c$, dass

$$e^c = \frac{1}{x},$$

also

$$x = \frac{1}{e^c} = e^{-c}.$$

Damit ist $\ln x = -c$, also

$$-\ln x = c = \ln \frac{1}{x}.$$

3. folgt aus $e^0 = 1$.

4. Da $\lim_{y\to\infty} e^y = \infty$ und exp und ln streng monoton wachsend sind, muss auch $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ gelten. Analog folgt die Aussage für $x \to 0^+$. □

Bemerkung 2.4.17. Da $\ln x$ auf $(0, \infty)$ eine bijektive Funktion ist, ist Logarithmieren einer Gleichung, wo beide Seiten positiv sind, eine Äquivalenzumformung.

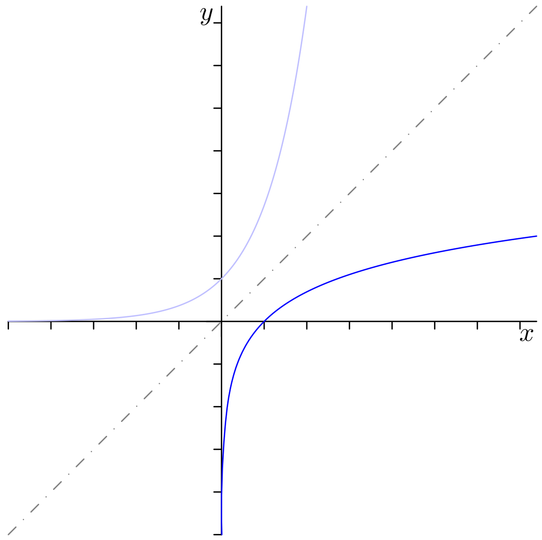


Abbildung 2.23.: Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$.

Beispiel 2.4.18. Löse die Gleichung

$$1.01^n = 17.$$

Da beide Seiten positiv sind, können wir logarithmieren:

$$\begin{aligned} & \ln\left(1.01^n\right) = \ln(17) & \\ \Leftrightarrow \quad & n \ln(1.01) = \ln 17 & \quad | : \ln(1.01) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n = \frac{\ln(17)}{\ln(1.01)} \approx 284.7. & \end{aligned}$$

2.4.10. Allgemeine Exponentialfunktion und Logarithmen zu beliebigen Basen

Definition 2.4.19. Sei $a \in (0, \infty)$. Dann heißt die Funktion $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $x \mapsto a^x$ *allgemeine Exponentialfunktion* zur Basis a, wobei

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{\ln a \cdot x}.$$

Wenn $\ln a > 0$, d.h. $a > 1$, so verhält sich a^x entsprechend e^x mit umskalierter x-Achse.
Wenn $\ln a < 0$, d.h. $a < 1$, so verhält sich a^x entsprechend e^x gespiegelt an der y-Achse und mit umskalierter x-Achse.

Definition 2.4.20. Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Dann heißt die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$ der *Logarithmus zur Basis a* von x, schreibe

$$\log_a x.$$

Proposition 2.4.21. Die Funktion $\log_a x$ hat folgende Eigenschaften:

1. $\log_a x = a \Leftrightarrow a^y = x$.
2. $\log_a 1 = 0$,
   $\log_a a = 1$.
3. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

BEWEIS. 1. folgt aus der Definition der Umkehrfunktion.

2. folgt wegen $a^0 = 1$ und $a^1 = a$.
3. Es gilt

$$\begin{aligned}
& & \log_a &= y \\
&\Leftrightarrow & x &= a^y \\
&\Leftrightarrow & \ln x &= \ln a^y \\
&\Leftrightarrow & \ln x &= y \cdot \ln a \\
&\Leftrightarrow & y &= \frac{\ln x}{\ln a},
\end{aligned}$$

also

$$\log_a = y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

□

2.4.11. Hyperbel- und Areafunktionen

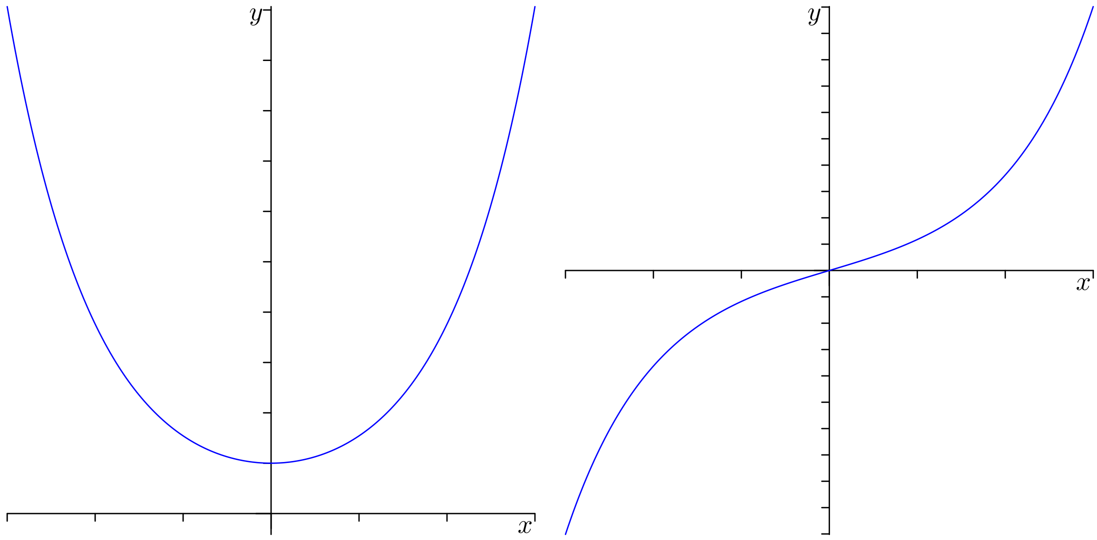
Definition 2.4.22. Definiere die Funktionen

$$\begin{aligned}
\cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & &\text{als } \textit{Cosinus hyperbolicus}, \\
\sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & &\text{als } \textit{Sinus hyperbolicus}, \\
\tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} & &\text{als } \textit{Tangens hyperbolicus}.
\end{aligned}$$

Satz 2.7 (Eigenschaften der Hyperbelfunktionen). Für die Hyperbelfunktionen gelten folgende Eigenschaften:

1. $\cosh x$ ist eine gerade Funktion, $\sinh x$ eine ungerade Funktion.
2. $\cosh x$ ist streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$.

   $\sinh x$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.



(a) $\cosh x$ (b) $\sinh x$

Abbildung 2.24.: Hyperbelfunktionen cosh und sinh.

3. $\cosh 0 = 1$ und $\sinh 0 = 0$.
4. $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ für $x \in \mathbb{R}$.
5. $\lim_{x\to\infty} \cosh x = \lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$.

Beweis. 1. Es gilt

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \cosh x$$

und

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\sinh x.$$

2. ist jetzt zu mühsam und wird später mit Hilfe der Differentialrechnung gezeigt.
3. Es gilt

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

und

$$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0.$$

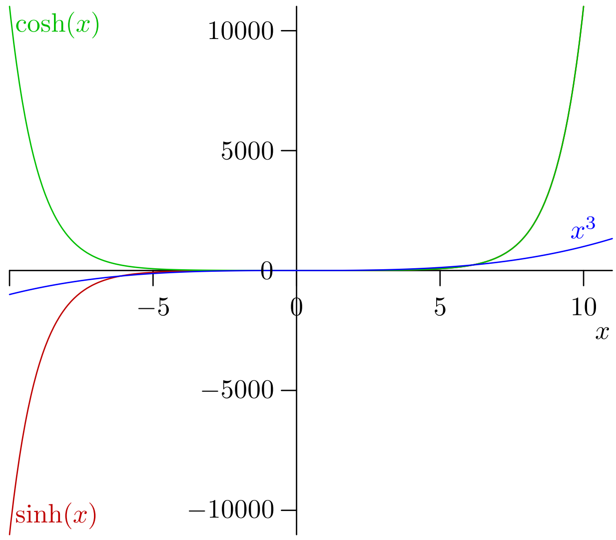


Abbildung 2.25.: Wachstum der Hyperbel- im Vergleich zu Potenzfunktionen. Die Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ wachsen schneller als x^n, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

4. Es gilt

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{2+2}{4} = 1.\end{aligned}$$

5. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to\infty} \pm \overbrace{e^{-x}}^{\to 0}}{2} = \frac{\infty \pm 0}{2} = \infty.$$

□

Definition 2.4.23. Die Umkehrfunktion von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Areasinus hyperbolicus*,

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Die Umkehrfunktion von $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ heißt *Areacosinus hyperbolicus*,

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty).$$

Man kann diese Funktionen auf bereits bekannte zurückführen:

$$\begin{aligned} & \operatorname{arsinh} x = y \\ \Leftrightarrow \quad & x = \sinh y \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \end{aligned}$$

und mit $e^y = z$, also $e^{-y} = \frac{1}{z}$ und $y = \ln z$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = z - \frac{1}{z} && \mid \cdot z \\ \Leftrightarrow \quad & 2xz = z^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & z^2 - 2xz - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & z = x \pm \sqrt{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Da $z = e^y$, folgt $z > 0$. Wegen

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \geq x$$

gilt aber

$$x - \sqrt{x^2 + 1} < x - x = 0,$$

also kann das „$-$" ausgeschlossen werden. Somit gilt

$$z = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

bzw.

$$\operatorname{arsinh} x = y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

2.4.12. Trigonometrische und Arcusfunktionen

Definition 2.4.24. sin, cos, tan, cot heißen *trigonometrische Funktionen.*

Die trigonometrischen Funktionen wurden in *Mathematik 0* am Einheitskreis definiert. Über die dort behandelten Eigenschaften hinausgehend benötigen wir weitere Resultate.

Satz 2.8 (Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$). Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

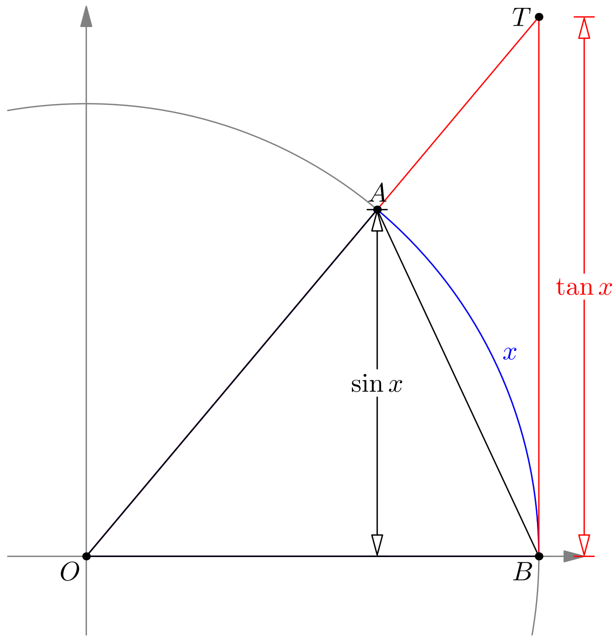


Abbildung 2.26.: Flächen bei der Betrachtung von $\frac{\sin x}{x}$.

Beweis. Betrachte die Flächen in Abbildung 2.26. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle OAB$ ist

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle OTB$ ist

$$\frac{1 \cdot \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}.$$

Der Flächeninhalt des Kreissegments OBA ist

$$\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}.$$

Weil diese Flächen ineinander enthalten sind, folgt unmittelbar

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}.$$

Durch Division dieser Ungleichungen durch $2 \sin x$ folgt

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Die Grenzwerte von 1 und $\frac{1}{\cos x}$ für $x \to 0$ sind jeweils 1, somit muss also gemäß Einzwicksatz (Satz 2.1, 4) auch

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

gelten. Der Grenzwert des Kehrwerts $\frac{\sin x}{x}$ ist demnach ebenfalls 1. $\square$

Satz 2.9 (Additionstheoreme). Für α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

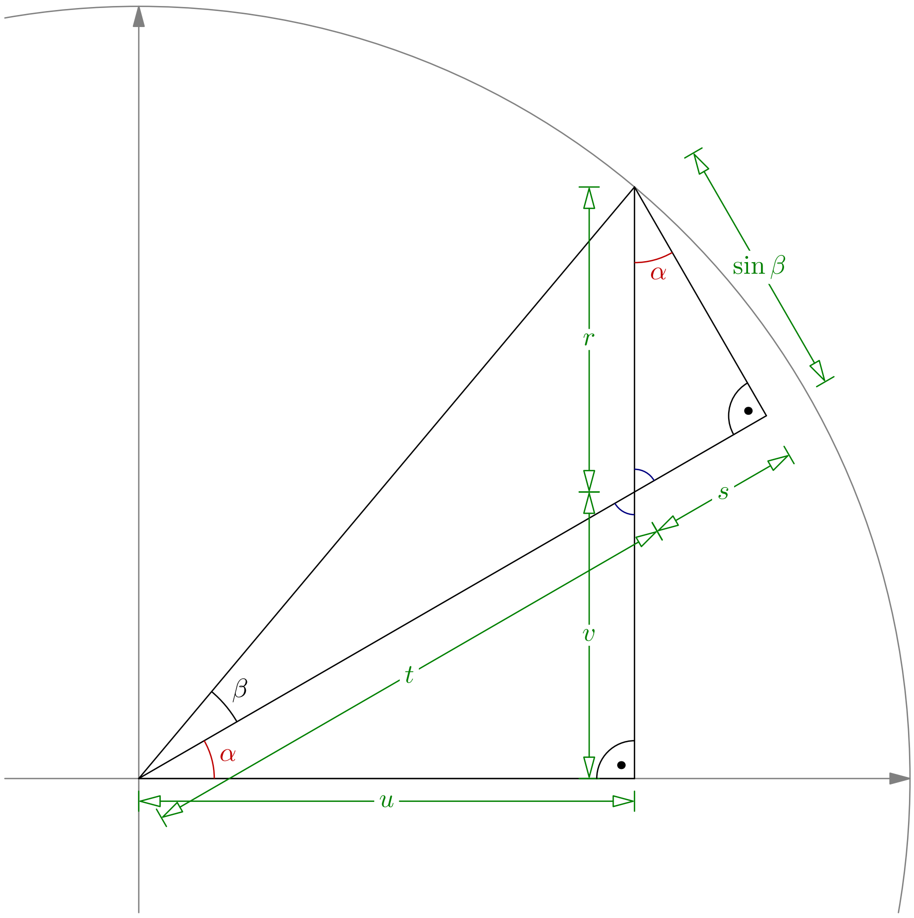


Abbildung 2.27.: Beweis der Additionstheoreme.

Beweis. Betrachte die Winkel α und β im Einheitskreis und bezeichne die auftretenden Längen wie in Abbildung 2.27. Es gilt $\cos\alpha = \frac{\sin\beta}{r}$, also

$$r = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

Weiters folgt aus $\tan\alpha = \frac{s}{\sin\beta}$, dass

$$s = \tan\alpha\sin\beta.$$

Aus $t + s = \cos\beta$ ergibt sich

$$t = \cos\beta - s$$

und mit $\cos\alpha = \frac{u}{t}$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) = u = t\cos\alpha &= (\cos\beta - \tan\alpha\sin\beta)\cos\alpha \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Wegen $\sin\alpha = \frac{v}{t}$ gilt

$$v = t\sin\alpha = (\cos\beta - \tan\alpha\sin\beta)\sin\alpha$$

und damit

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) = v + r &= \cos\beta\sin\alpha - \tan\alpha\sin\beta\sin\alpha + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \\ &= \cos\beta\sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\beta\sin\alpha + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \\ &= \cos\beta\sin\alpha + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}(\underbrace{-\sin^2\alpha + 1}_{=\cos^2\alpha}) \\ &= \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha.\end{aligned}$$

Durch Setzen von $\tilde{\beta} = -\beta$ und Anwenden der bisherigen Resultate und

$$\begin{aligned}\sin(-\beta) &= -\sin\beta, \\ \cos(-\beta) &= \cos\beta\end{aligned}$$

folgen schließlich die Aussagen für die Differenz $\alpha - \beta$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+\tilde{\beta}) &= \cos\alpha\cos\tilde{\beta} - \sin\alpha\sin\tilde{\beta} \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\tilde{\beta}) &= \sin\alpha\cos\tilde{\beta} + \cos\alpha\sin\tilde{\beta} \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$ □

Aus den Additionstheoremen folgt unmittelbar folgender

Satz 2.10 (Doppelwinkelfunktionen). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

Beweis. Setze $\beta = \alpha$ und wende Satz 2.9 an:

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ &= 1 - 2(1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1, \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$ □

Weiters folgt folgender

Satz 2.11 (2. Additionstheoreme). Für α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}$$

Beweis. Aus den Additionstheoremen für sin ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) + \sin(x-y) &= \sin x\cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y\\
&= 2\sin x\cos y.
\end{aligned}$$

Setzt man hier $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, folgt

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Wegen $\sin -\beta = -\sin\beta$ ergibt sich daraus unmittelbar

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Aus den Additionstheoremen für cos ergibt sich

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) + \cos(x-y) &= \cos x\cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y\\
&= 2\cos x\cos y,\\
\cos(x+y) - \cos(x-y) &= \cos x\cos y - \sin x \sin y - \cos x \cos y - \sin x \sin y\\
&= -2\sin x\sin y.
\end{aligned}$$

Setzt man wieder $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, folgt

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}$$ $\square$

Da die Sinusfunktion im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton steigend von -1 bis 1 ist, ist die Funktion

$$\sin : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

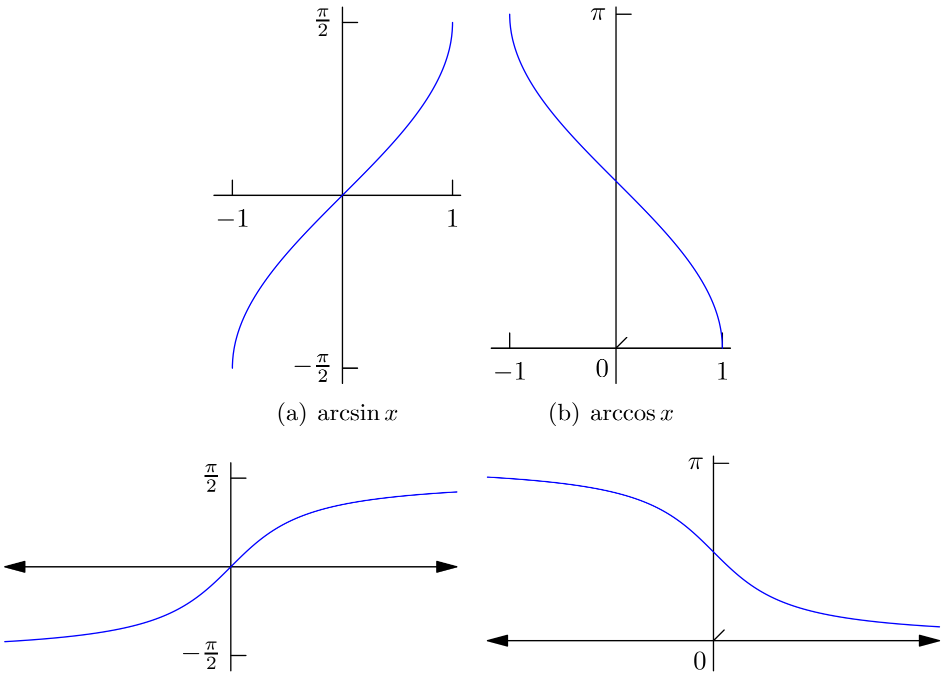
bijektiv. Es gibt also eine Umkehrfunktion mit Definitionsbereich $[-1, 1]$ und Wertemenge $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ähnliche Überlegungen kann man für cos, tan, cot anstellen; es ergibt sich folgende

Definition 2.4.25 (Arcusfunktionen). Die Umkehrfunktionen zu

$$\begin{aligned}
\sin &: \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\\
\cos &: [0, \pi] \to [-1, 1],\\
\tan &: \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\\
\cot &: (0, \pi) \to \mathbb{R}
\end{aligned}$$

heißen *Arcussinus*, *Arcuscosinus*, *Arcustangens* bzw. *Arcuscotangens*, d.h.

$$\begin{aligned}
\arcsin &: [-1, 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right],\\
\arccos &: [-1, 1] \to [0, \pi],\\
\arctan &: \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right),\\
\operatorname{arccot} &: \mathbb{R} \to (0, \pi).
\end{aligned}$$



(a) $\arcsin x$ (b) $\arccos x$ (c) $\arctan x$ (d) $\operatorname{arccot} x$

Abbildung 2.28.: Arcusfunktionen.

Bemerkung 2.4.26. Es wurde bereits gezeigt, dass

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$$

gilt. Daraus folgt nun für die Umkehrfunktion

$$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

Siehe Abbildung 2.28.

2.5. Funktionen mehrerer Veränderlicher

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen in mehreren Veränderlichen – im Gegensatz zu bisher, wo nur Funktionen in einer Variablen behandelt wurden. Diese Veränderlichen können entweder als einzelne „Parameter“ $x_1, \dots, x_n$ gesehen werden, oder man fasst sie als einen Vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ zusammen. Dementsprechend schreibt man eine Funktion als

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. (Die Funktion f muss nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sein, daher notiert man $U \subseteq \mathbb{R}^n$ als Definitionsbereich.) In den meisten Fällen werden wir nur zwei Variablen notieren ($n = 2$) – die Aussagen lassen sich jedoch auf beliebiges n verallgemeinern.

Beispiel 2.5.1. Betrachte die Gasgleichung aus Beispiel 2.1.2,

$$p \cdot V = R \cdot T.$$

Der Druck p kann nun als Funktion $p : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Veränderlichen V und T gesehen werden, d.h.

$$p = p(V, T) = \frac{R \cdot T}{V}.$$

Bemerkung 2.5.2. Im $\mathbb{R}^3$ ist durch eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in zwei Veränderlichen eine *Fläche* definiert: Jedem Punkt (x, y) in der Ebene $\mathbb{R}^2$ wird eine „Höhe“ $z = f(x, y)$ zugeordnet.

Umgekehrt entstehen durch „Festhalten“ einer bestimmten Höhe sogenannte *Höhenlinien*, also Kurven, auf denen

$$z = f(x, y)$$

konstant ist (siehe Abbildung 2.29). Dies entspricht der Namensgebung in der Geographie, wo Höhenlinien durch Punkte gleicher Seehöhe gegeben sind. (Die Seehöhe kann ebenfalls als Funktion zum Beispiel der Koordinaten eines Punktes auf der Erde gesehen werden.)

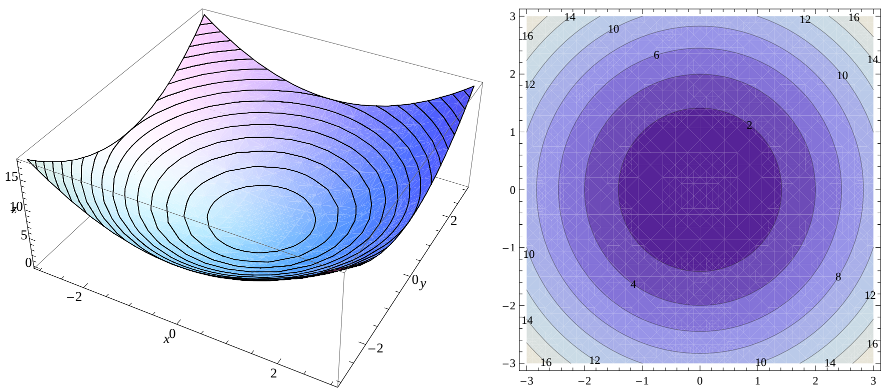
Man spricht auch von *Isolinien*, z.B. *Isobaren* (Punkte gleichen Drucks), *Isothermen* (Punkte gleicher Temperatur), usw.

Analog zu Definition 2.3.2 für Funktionen in einer Veränderlichen kann nun der Grenzwert einer Funktion in mehreren Veränderlichen definiert werden.

Definition 2.5.3 (Grenzwert im $\mathbb{R}^n$). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Wir sagen

$$y_0 = \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}),$$

wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle x mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ gilt, dass $|f(\vec{x}) - y_0| < \varepsilon$.



(a) 3D-Ansicht (b) Draufsicht

Abbildung 2.29.: Höhenlinien von $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Bemerkung 2.5.4. Wieder kann diese formale Definition so interpretiert werden, dass man sich bei Annäherung an einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ immer näher an einen bestimmten Funktionswert y_0 annähert. Dabei gibt es wohlgemerkt keine Einschränkung für die Richtung der Annäherung, was gefühlsmäßig im $\mathbb{R}^2$ (unendlich viele mögliche Richtungen) einen größeren Unterschied macht als in $\mathbb{R}$ (zwei Richtungen).

Es scheint daher sinnvoll, ein neues Koordinatensystem einzuführen, in dem die *Richtung* einen eigenen Parameter darstellt. Das erfüllen die sogenannten *Polarkoordinaten* (siehe Abbildung 2.30).

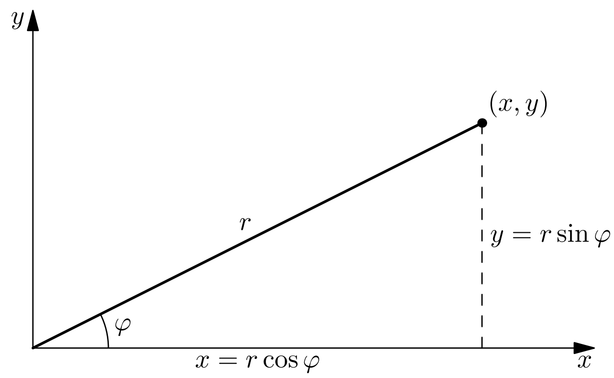


Abbildung 2.30.: Polarkoordinaten.

Setze dementsprechend

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi := \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{falls } x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{falls } x < 0, y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & \text{falls } x < 0, y < 0, \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{falls } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } x = 0, y < 0, \end{cases}$$

bzw.

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi.$$

Die Annäherung $(x, y) \to (0, 0)$ ist nun äquivalent zu $r \to 0$, da es ja auf die Richtung (also den Winkel φ) nicht ankommt.

Beispiel 2.5.5. 1. Bestimme den Grenzwert der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}; \qquad f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

(siehe Abbildung 2.31) gegen $(0, 0)$, sofern er existiert.

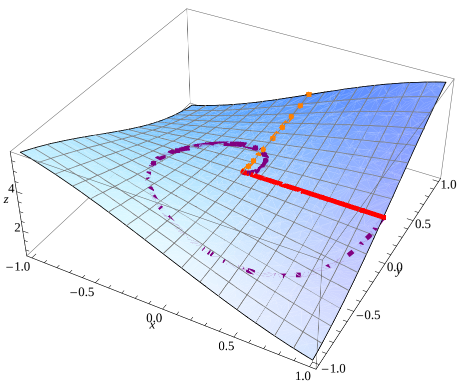


Abbildung 2.31.: Funktion $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ mit verschiedenen Wegen zum Ursprung.

Durch Einführung von Polarkoordinaten kann der Grenzwert geschrieben werden als

$$L := \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} r \cdot (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi).$$

Der Wertebereich von cos und sin ist $[-1, 1]$, daher gilt $-2 \leq (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) \leq 2$ (eigentlich wäre der Ausdruck noch stärker einschränkbar, was zählt ist aber vor allem, dass er *beschränkt* ist) und somit

$$L = \lim_{r\to 0} r \cdot \underbrace{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}_{\text{beschränkt}} = 0.$$

Der Grenzwert existiert also und ist 0.

2. Sei nun

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$$

(siehe Abbildung 2.32).

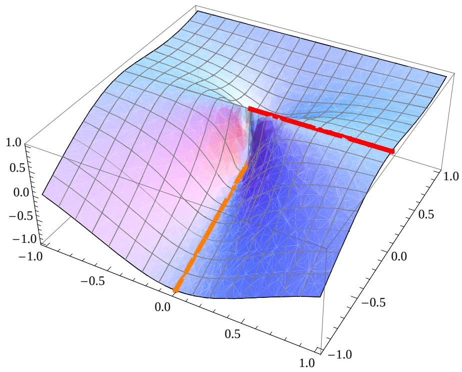


Abbildung 2.32.: Funktion $\frac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$ mit verschiedenen Wegen zum Ursprung.

Wieder schreiben wir den Grenzwert in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} L &:= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^3\sin^3\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0}(\cos^2\varphi + r\sin^3\varphi) \\ &= \cos^2\varphi. \end{aligned}$$

Der Grenzwert hängt also von φ ab – und damit von der Richtung, in der wir uns an $(0,0)$ annähern! Anders ausgedrückt: Es gibt verschiedene Wege zum Ursprung, die sich jeweils einem anderen Wert annähern. Somit existiert kein Grenzwert von f gegen $(0,0)$.

Bemerkung 2.5.6. Die üblichen Rechenregeln für die Grenzwerte von Summen, Produkten und Quotienten (und entsprechender Zusammensetzungen) gelten weiterhin. Das heißt: Existiert der Grenzwert der Funktionen $f,g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $\vec{x}_0 \in U$, dann existiert auch der Grenzwert von $f+g$ und von $f\cdot g$ in $\vec{x}_0$, und falls $g(\vec{x}_0) \neq 0$, auch von $\frac{f}{g}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) &= \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}), \\ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})) &= \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}), \\ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} &= \frac{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})} \qquad \text{(falls } g(\vec{x}_0) \neq 0). \end{aligned}$$

Definition 2.5.7 (Stetigkeit). Eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $(x_0,y_0) \in U$, wenn

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Bemerkung 2.5.8. Stetigkeit bedeutet also, dass der Grenzwert „in die Funktion hineingezogen“ werden darf. Es gilt ja

$$f(x_0, y_0) = f\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(x, y)\right).$$

Im Allgemeinen (also für unstetige Funktionen) ist das nicht möglich!

Beispiel 2.5.9.

1. Betrachte wieder die Funktion aus dem vorigen Beispiel, aber ergänzt um eine Definition im Ursprung $(0, 0)$:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Es gilt (wie vorher ausgerechnet)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0),$$

also ist f in $(0, 0)$ stetig. Man spricht in so einem Fall von einer *stetigen Ergänzung*.

2. Betrachte

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Da der Grenzwert von f in $(0, 0)$ – wie im vorigen Beispiel gezeigt – nicht existiert, kann die Funktion in $(0, 0)$ nicht stetig sein.

Bemerkung 2.5.10. Die Zusammensetzung stetiger Funktionen ergibt wieder eine stetige Funktion. Sind also $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $\vec{x}_0 \in U$, dann auch $f + g$ und $f \cdot g$, und falls $g(\vec{x}_0) \neq 0$, dann auch $\frac{f}{g}$.

2.6. Polardarstellung komplexer Zahlen

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Wie wir bereits in Abschnitt 1.4 gesehen haben, kann man z durch kartesische Koordinaten (x, y) in einem Koordinatensystem graphisch darstellen. Dieser Punkt kann nun genauso durch seinen Abstand vom Ursprung und durch den Winkel, den die Gerade vom Ursprung zu (x, y) mit der x-Achse einschließt, eindeutig charakterisiert werden. Das führt auf Polarkoordinaten, wie bereits in Bemerkung 2.5.4 erwähnt (vgl. Abbildung 2.30).

Setze also für $z = x + iy \neq 0$

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi := \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{falls } x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{falls } x < 0, y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & \text{falls } x < 0, y < 0, \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{falls } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } x = 0, y < 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

bzw.

$$x = r\cos\varphi, \qquad\qquad y = r\sin\varphi. \tag{2.2}$$

Der Winkel φ wird *Argument* von z genannt und stellt den Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Vektor (x, y) im mathematisch positiven Sinn, also gegen den Uhrzeigersinn, dar.

Was passiert nun bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z = x+iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ und $w = u + iv = s\cos\psi + is\sin\psi$? Es gilt

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (r\cos\varphi + ix\sin\varphi)(s\cos\psi + is\sin\psi) \\ &= (rs\cos\varphi\cos\psi - rs\sin\varphi\sin\psi) + i(rs\sin\varphi\cos\psi + rs\cos\varphi\sin\psi) \\ &= rs\big(\underbrace{(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)}_{\cos(\varphi+\psi)} + i\underbrace{(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)}_{\sin(\varphi+\psi)}\big) \end{aligned}$$

(vgl. Additionstheoreme, Satz 2.9)

$$= \underbrace{rs}_{\text{Radius}}(\cos(\underbrace{\varphi+\psi}_{\text{Winkel}}) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Das Ergebnis lässt sich wieder als Polardarstellung einer komplexen Zahl mit Radius rs und Winkel $\varphi + \psi$ interpretieren. Der Radius von $z \cdot w$ ist also das *Produkt* der Radien von z und von w, während der Winkel von $z \cdot w$ die *Summe* der Winkel von z und von w ist.

Für Potenzen von komplexen Zahlen folgt daraus unmittelbar folgender

Satz 2.12 (Formel von de Moivre). Seien $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{2.3}$$

Daraus wiederum ergibt sich ein Ansatz zum Berechnen komplexer Wurzeln.

Beispiel 2.6.1. Suche alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. Berechne dazu zunächst die Polardarstellung von $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$: Der Radius ist

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Der Winkel ergibt sich gemäß (2.1) (mit $x < 0$, $y \geq 0$) als

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \pi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Gesucht sind also alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z^3 = 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Der Ansatz

$$z = s(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad\qquad \text{mit } 0 \le \psi \le 2\pi$$

liefert gemäß (2.3)

$$z^3 = s^3(\cos 3\psi + i\sin 3\psi) \qquad\qquad \text{mit } 0 \le 3\psi \le 6\pi.$$

Somit muss einerseits $s^3 = 1$ und damit $s = 1$ sein, andererseits ergibt sich für den Winkel aufgrund der 2π-Periodizität der Winkelfunktionen sin und cos

$$\begin{aligned}
& 3\psi = \frac{3\pi}{4} && \Leftrightarrow \psi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \\
\text{oder} \quad & 3\psi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi && \Leftrightarrow \psi = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = 165^\circ \\
\text{oder} \quad & 3\psi = \frac{3\pi}{4} + 4\pi && \Leftrightarrow \psi = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = 285^\circ.
\end{aligned}$$

Wir haben also drei dritte Wurzeln von $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ gefunden, die sich regelmäßig (d.h. in einem gleichseitigen Dreieck) um den Ursprung anordnen (siehe Abbildung 2.33).

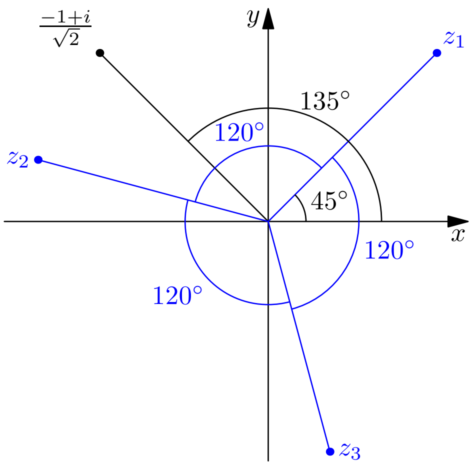


Abbildung 2.33.: Komplexe Wurzeln von $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

Schließlich kann noch von der Polardarstellung in kartesische Koordinaten zurückgerechnet werden, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \\
z_2 &= 1\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \frac{-(1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}, \\
z_3 &= 1\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \frac{-1+\sqrt{3} - i(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Satz 2.13 (Wurzeln aus komplexen Zahlen). Sei $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ eine komplexe Zahl mit Radius $r > 0$ und Winkel φ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau n komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ mit $z_j^n = w$, nämlich

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right), \\
z_2 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right), \\
z_3 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right)\right), \\
&\vdots \\
z_n &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

3. Differentialrechnung

3.1. Definition

Bereits in der Antike hat man sich die Frage gestellt, wie man die Tangente an eine gegebene Kurve bestimmen kann. Ende des 17. Jahrhunderts löste schließlich Gottfried Wilhelm Leibniz dieses *Tangentenproblem*. Unabhängig davon löste zur selben Zeit Isaac Newton das physikalische Problem der *Momentangeschwindigkeit*, das dem Tangentenproblem entspricht (siehe Abbildung 3.1).

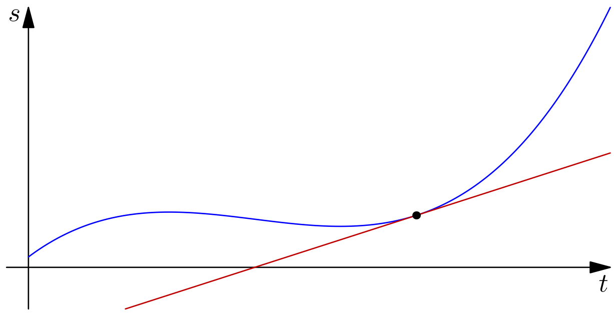


Abbildung 3.1.: Die Momentangeschwindigkeit entspricht der Tangente an die Kurve im Zeit-Weg-Diagramm.

Die Idee zur Berechnung der Tangentensteigung in einem Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist die Annäherung durch eine Sekante durch zwei Kurvenpunkte (siehe Abbildung 3.2). Wählt man eine „Schrittweite“ Δx, ergibt sich die Steigung der Sekante als

$$k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(vgl. Bemerkungen zur Geradensteigung in Abschnitt 2.4.2). Dieser Quotient wird als *Differenzenquotient* bezeichnet.

Um die Tangente möglichst gut zu approximieren, muss man die zwei Punkte x_0 und $x_0 + \Delta x$ näher aneinander rücken. Darauf beruht folgende

Definition 3.1.1. Eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar in einem Punkt* x_0 im Inneren von U, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

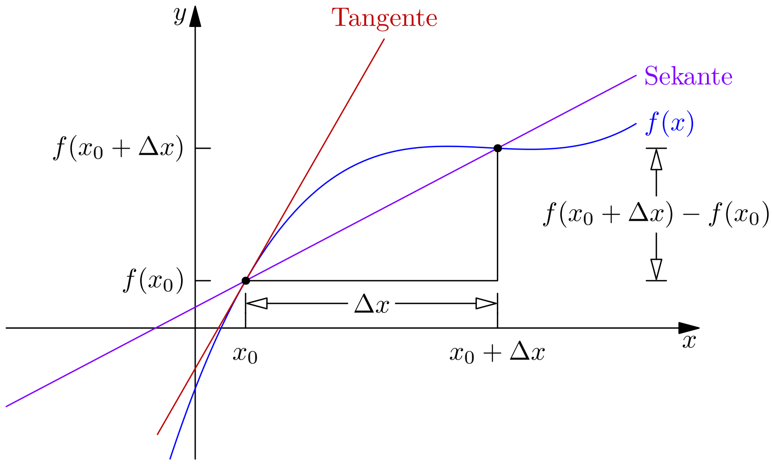


Abbildung 3.2.: Approximation der Tangente durch eine Sekante.

existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkt x_0 und wird meist mit

$$f'(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx}f(x_0)$$

geschrieben.

Bezogen auf die Interpretation der Tangentensteigung als Momentangeschwindigkeit bedeutet das, dass wir die zwei Messpunkte beliebig nah zusammenrücken, sozusagen eine Section-Control mit unendlich kleinem Abstand der Kontrollpunkte.

Die Ableitung einer Funktion f in x_0 ist die Steigung der Tangente an f in x_0 (auch als Steigung von f selbst bezeichnet). Sie ist also die bestmögliche Approximation von f in x_0 durch eine Gerade (lineare Funktion). Differenzierbarkeit kann in diesem Sinne folgendermaßen alternativ definiert werden:

Eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in U$ genau dann, wenn eine Konstante $f'(x_0)$ existiert, sodass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0,$$

wenn also f in x_0 beliebig gut durch eine lineare Funktion $f'(x_0)h$ approximiert werden kann. Das wiederum ist gleichbedeutet mit

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \varepsilon(h)h, \tag{3.1}$$

wobei

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

(Der „Approximationsfehler“ $\varepsilon(h)$ wird beliebig klein, wenn die Schrittweite h klein genug gewählt wird.)

Formal lässt sich das ausdrücken in folgendem

Satz 3.1 (Differenzierbarkeit als lineare Approximierbarkeit). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$. Dann ist f genau dann in $x_0 \in U$ differenzierbar, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x+h) = f(x) + ah + h\varepsilon(h)$$

für $h \in V$ gilt, wobei $V = (-\delta, \delta)$ für ein positives δ. In diesem Fall gilt

$$a = f'(x).$$

Bemerkung 3.1.2. Lässt man den Fehlerterm $h\varepsilon(h)$ weg, so erhält man die Approximation

$$f(x+h) \approx f(x) + ah,$$

also wird $f(x)$ durch die *lineare Funktion* $f(x) + ah$ approximiert. Das ist genau die Tangente an f im Punkt x. Man spricht von *linearer Approximierbarkeit.* Dies wird insbesondere zur Verallgemeinerung in den $\mathbb{R}^n$ wichtig sein.

Definition 3.1.3 (Ableitungsfunktion, Stammfunktion). Wenn eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt eines Intervalls $I = (a, b)$ differenzierbar ist, heißt f *differenzierbar im Intervall I*. Eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, wenn sie differenzierbar im Intervall $U = (a, b)$ ist. Dann ist durch

$$f' : U \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eine neue Funktion, die *Ableitung* von f, definiert. Umgekehrt heißt f eine *Stammfunktion* von f'. Das Berechnen der Ableitung bei gegebener Funktion f wird als *Differenzieren* bezeichnet.

Beispiel 3.1.4. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x$ ist

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Das entspricht der bekannten Tatsache, dass die Steigung der Geraden $y = x$ (in jedem Punkt) gleich 1 ist.

Beispiel 3.1.5. Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 4x - 3$.

Es gilt per Definition

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\big((x+h)^2 + 4(x+h) - 3\big) - \big(x^2 + 4x - 3\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h - 3 - x^2 - 4x + 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2xh + 4h}{h} = \lim_{h\to 0} (h + 2x + 4) \\
&= 2x + 4.
\end{aligned}$$

Der auftretende Grenzwert existiert für alle x. Die Ableitung von f ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Daraus folgt nun etwa, dass die Steigung von f im Punkt $x = 2$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$$

ist.

3.2. Differentiationsregeln

Die Ableitung ist zwar durch den Grenzwert formal definiert, die wiederholte Anwendung dieser Definition und die damit verbundene Grenzwertberechnung für jede Funktion f und jeden Punkt x_0 wäre jedoch äußerst mühsam (vgl. Beispiel 3.1.5). Daher entwickeln wir ein paar Regeln, mit denen wir die meisten in der Praxis auftretenden Funktionen differenzieren können.

Satz 3.2 (Linearität der Ableitung). Seien $f,\ g : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen und seien $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\alpha f + \beta g : U \to R; \quad x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$$

differenzierbar und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

Beweis. Der Satz folgt direkt aus der Definition der Ableitung und der Linearität des Grenzwerts:

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha f(x+h) + \beta g(x+h) - \alpha f(x) - \beta g(x)}{h} \\
&= \alpha \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \beta \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \alpha f'(x) + \beta g'(x).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2.1. Aus der Linearität der Ableitung folgt, dass man Summen differenziert, indem man die einzelnen Summanden differenziert, und dass multiplikative Konstanten beim Differenzieren unverändert „stehen bleiben".

Satz 3.3 (Produktregel). Seien $f,\ g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei auf einem Intervall $I = (a, b)$ differenzierbare Funktionen. Dann ist das Produkt

$$fg : I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

differenzierbar und es gilt

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&\qquad\qquad = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&\qquad\qquad = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right)\\
&\qquad\qquad = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert also für alle $x \in I$ und ist damit der Wert von $(fg)'$ in x. □

Satz 3.4 (Quotientenregel). Seien f, $g : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen und sei $x \in U$ mit $g(x) \neq 0$. Dann ist der Quotient

$$\frac{f}{g} : U \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

im Punkt x differenzierbar und es gilt in x

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x)g(x+h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x)}{h\cdot g(x)g(x+h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{g(x)g(x+h)}\\
&= \frac{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{\lim_{h\to 0}\left(g(x)g(x+h)\right)}\\
&= \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.
\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert also wegen $g(x) \neq 0$ und entspricht damit dem Wert von $\left(\frac{f}{g}\right)'$ in x. □

Satz 3.5 (Kettenregel). Seien $g : U \subseteq \mathbb{R} \to V \subseteq R$ und $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann ist die Verkettung

$$f \circ g : U \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(g(x))$$

differenzierbar in x und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Beweis. Wegen der Differenzierbarkeit bzw. linearen Approximierbarkeit von g (vgl. (3.1)) gibt es in jedem Punkt $x \in U$ einen Ableitungswert $g'(x)$, sodass

$$g(x+\delta) = g(x) + \delta g'(x) + \varepsilon(\delta)\delta$$

mit $\varepsilon(\delta) \to 0$, wenn $\delta \to 0$. Weil $g(x) \in V$ im Definitionsbereich von f liegt, gilt ebenso

$$f(g(x)+\alpha) = f(g(x)) + \alpha f'(g(x)) + \eta(\alpha)\,|\alpha|$$

mit $\eta(\alpha) \to 0$, wenn $\alpha \to 0$. Damit folgt nun

$$f(g(x+\delta)) = f\left(g(x) + \delta g'(x) + \varepsilon(\delta)\delta\right)$$

und mit $\alpha_\delta := \delta g'(x) + \varepsilon(\delta)\delta$

$$= f(g(x)) + f(g(x)+\alpha_\delta) - f(g(x)),$$

also wegen der linearen Approximierbarkeit von f

$$= f(g(x)) + \alpha_\delta f'(g(x)) + \eta(\alpha_\delta)\alpha_\delta$$

mit $\eta(\alpha_\delta) \to 0$, wenn $\alpha_\delta \to 0$. Wenn nun $\delta \to 0$ geht, geht auch $\varepsilon(\delta) \to 0$ und somit $\frac{\alpha_\delta}{\delta} \to g'(x)$. Es gilt also

$$\frac{f(g(x+\delta)) - f(g(x))}{\delta} \to g'(x)f'(g(x)) \qquad \text{für } \delta \to 0,$$

was genau der Definition der Ableitung von $f \circ g$ im Punkt x entspricht. □

Satz 3.6 (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \to V \subseteq \mathbb{R}$ eine bijektive, differenzierbare Funktion und sei $x \in U$ mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ differenzierbar in $y := f(x)$ und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Beweis. Da f^{-1} die Umkehrabbildung von f ist, ist die Verkettung die identische Funktion, d.h.

$$(f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Die Ableitung dieser Funktion ist gemäß Beispiel 3.1.4 gleich 1. Laut Kettenregel können wir die Ableitung aber auch ausdrücken durch

$$(f \circ f^{-1})(y) = f'\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}\right)'(y).$$

Zusammen folgt daraus

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

□

Nachdem wir nun Regeln für das Differenzieren von Summen, Produkten, Quotienten, allgemeinen Funktionsverknüpfungen und Umkehrfunktionen haben, wollen wir die Ableitungen konkreter Funktionen ermitteln.

Potenzen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h},$$

das ist gemäß Binomischem Lehrsatz (x^n fällt weg)

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}. \end{aligned}$$

Hier gehen alle Summanden außer der zu $k = 1$ gegen 0, wenn $h \to 0$ geht. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \binom{n}{1} x^{n-1} \\ &= n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Exponentialfunktion

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp' x = (e^x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x, \end{aligned}$$

da wir bereits

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

wissen.

Natürlicher Logarithmus

Sei $x \in \mathbb{R}^+$. Da der natürliche Logarithmus ln die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion exp ist, gilt gemäß Satz 3.6 und wegen $\exp' x = \exp x$

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp \ln x} = \frac{1}{x}.$$

Allgemeine Exponentialfunktion und Logarithmen zu beliebigen Basen

Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Es gilt $a^x = \exp(x \ln a)$ und daher mit der Kettenregel (Satz 3.5)

$$(a^x)' = \exp'(x \ln a) = \exp(x \ln a) \ln a = a^x \ln a.$$

Für $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ gilt

$$\log_a' x = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \ln' x = \frac{1}{x \ln a}.$$

Bemerkung 3.2.2. Hier ist der natürliche Logarithmus also wirklich „natürlich“.

Hyperbel- und Areafunktionen

Die Hyperbelfunktionen können einfach mit Hilfe ihrer Definition über die Exponentialfunktion differenziert werden:

$$\begin{aligned}
\cosh' x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \\
\sinh' x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \\
\tanh' x &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)',
\end{aligned}$$

das ist gemäß Quotientenregel (Satz 3.4)

$$= \frac{\sinh' x \cosh x - \sinh x \cosh' x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Für die Areafunktionen gilt damit als Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen gemäß Satz 3.6

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcosh}' x &= \frac{1}{\cosh' \operatorname{arcosh} x} = \frac{1}{\sinh \operatorname{arcosh} x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \operatorname{arcosh} x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \\
\operatorname{arsinh}' x &= \frac{1}{\sinh' \operatorname{arsinh} x} = \frac{1}{\cosh \operatorname{arsinh} x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 \operatorname{arsinh} x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \\
\operatorname{artanh}' x &= \frac{1}{\tanh' \operatorname{artanh} x} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 \operatorname{artanh} x}} = \frac{1}{\frac{1 - \cosh^2 \operatorname{artanh} x}{\cosh^2 \operatorname{artanh} x} + 1} = \frac{1}{\frac{-\sinh^2 \operatorname{artanh} x}{\cosh^2 \operatorname{artanh} x} + 1} \\
&= \frac{1}{-\tanh^2 \operatorname{artanh} x + 1} = \frac{1}{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

Es gilt per Definition der Ableitung

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h},$$

das ist laut 2. Additionstheorem (Satz 2.11)

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \end{aligned}$$

Nun ist der Grenzwert des ersten Faktors gemäß Satz 2.8 gleich

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Weiters ist natürlich $\lim_{h\to 0} \frac{h}{2} = 0$. Also erhalten wir

$$\sin' x = 1 \cdot \cos(x+0) = \cos x.$$

Ähnlich folgt

$$\begin{aligned} \cos' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2}{h} \sin \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -1 \cdot \sin(x+0) = -\sin x. \end{aligned}$$

Damit gilt schließlich mit der Quotientenregel (Satz 3.4)

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

bzw.

$$\cot' x = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \frac{-\tan' x}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Für die Umkehrfunktionen gilt somit

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' \arcsin x} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(da $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ und cos auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ positiv ist, war die positive Wurzel gerechtfertigt),

$$\operatorname{arccos}' x = \frac{1}{\cos' \arccos x} = -\frac{1}{\sin \arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \arccos x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(ähnlich zu vorher war die positive Wurzel gerechtfertigt, da $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ und sin auf dem Intervall $[0,\pi]$ positiv ist),

$$\begin{aligned}\operatorname{arctan}' x &= \frac{1}{\tan' \arctan x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \arctan x}} = \frac{1}{\frac{1-\cos^2 \arctan x}{\cos^2 \arctan x} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin^2 \arctan x}{\cos^2 \arctan x} + 1} = \frac{1}{\tan^2 \arctan x + 1} = \frac{1}{x^2+1},\end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned}\operatorname{arccot}' x &= \frac{1}{\cot' \operatorname{arccot} x} = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \operatorname{arccot} x}} = -\frac{1}{\frac{1-\sin^2 \operatorname{arccot} x}{\sin^2 \operatorname{arccot} x} + 1} \\ &= -\frac{1}{\frac{\cos^2 \operatorname{arccot} x}{\sin^2 \operatorname{arccot} x} + 1} = -\frac{1}{\cot^2 \operatorname{arccot} x + 1} = -\frac{1}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Nachdem wir nun die Ableitungen aller elementaren Funktionen ermittelt haben, können wir auch jedwede Kombinationen derselbigen differenzieren:

Beispiel 3.2.3. Die Ableitung von

$$f(x) = \arccos\Big(\cosh(x) + e^{x^2} + \operatorname{arcosh} x\Big)$$

ist nach der Kettenregel

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \big(\cosh x + e^{x^2} + \operatorname{arcosh} x\big)^2}} \cdot \left(\sinh x + e^{x^2} \cdot 2x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right).$$

3.3. Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

Wie in Abschnitt 2.5 über Funktionen in mehreren Veränderlichen werden wir auch hier oft nur Funktionen in zwei Veränderlichen betrachten, wobei sich die dargestellten Konzepte auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern lassen.

Zunächst wird, wie bereits in Bemerkung 3.1.2 angedeutet, Differenzierbarkeit in mehreren Veränderlichen über *lineare Approximierbarkeit* definiert.

Definition 3.3.1 (Differenzierbarkeit). Eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *(total) differenzierbar* in $(x_0, y_0) \in U$, falls f als

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| \varepsilon(x,y) \qquad (3.2)$$

mit

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0$$

dargestellt werden kann.

Bemerkung 3.3.2. Lässt man den Restterm weg, so erhält man die Approximation

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0).$$

Schreibt man $f(x,y) = z$ und $f(x_0,y_0) = z_0$, so ergibt sich

$$z \approx z_0 + a(x-x_0) + b(b(y-y_0),$$

also

$$ax + by - z \approx ax_0 + by_0 - z_0.$$

Denkt man sich hier Gleichheit, ist das eine Ebenengleichung in Normalform; der Normalvektor ist $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ und ein Punkt der Ebene $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 = f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$. Die Funktion $f(x,y)$ wird also durch eine Ebene (linear) approximiert, die sogenannte *Tangentialebene* (siehe Abbildung 3.3).

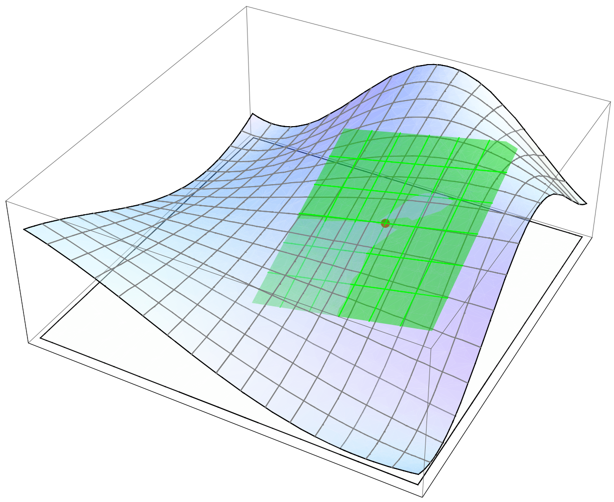


Abbildung 3.3.: Tangentialebene an eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 3.3.3. Die Gleichung (3.2) kann im Allgemeinen für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $\vec{x}_0$ als

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \vec{v}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \, \varepsilon(\vec{x})$$

mit

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \varepsilon(\vec{x}) = 0$$

geschrieben werden.

Was passiert, wenn wir in einer Funktion in mehreren Veränderlichen gewisse Variablen festhalten, sodass eine eindimensionale Funktion entsteht? Dann können wir diese Funktion wie bisher gewohnt nach dieser einen Variablen ableiten. Das motiviert die folgende

Definition 3.3.4 (Partielle Ableitung). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Die *partiellen Ableitungen* in x bzw. y sind definiert als

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

sofern diese Grenzwerte existieren. Die Funktion f heißt dann im Punkt (x_0, y_0) *partiell differenzierbar.*

Bemerkung 3.3.5. Um eine Funktion beispielsweise partiell nach x abzuleiten, sieht man sie also als Funktion in x alleine und die anderen Variablen als konstant an und differenziert wie im Eindimensionalen nach x.

Bemerkung 3.3.6. In der Thermodynamik ist es üblich, die konstant gehaltenen Variablen als Subskripts anzuführen, also beispielsweise

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$$

zu schreiben.

In der Mathematik ist es auch üblich, partielle Ableitungen durch Subskripts zu bezeichnen, etwa

$$f_x.$$

Alles, wonach nicht abgeleitet wird, ist konstant.

Es besteht keine Verwechslungsgefahr zwischen den Notationen: Sobald das Symbol ∂ wie in $\frac{\partial \ldots}{\partial \ldots}$ vorkommt, ist ein Subskript im „thermodynamischen Sinn“ zu verstehen.

Beispiel 3.3.7. Betrachte ein reales Gas mit Druck p, Volumen V, Temperatur T und Stoffmenge $n = 1$ mol. Dann lautet die *Van-der-Waals-Gleichung*

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

wobei R die universelle Gaskonstante, a den Kohäsionsdruck und b das Kovolumen bezeichnet. Durch Umformen erhält man p als Funktion in den Veränderlichen V und T:

$$p(V,T) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

Diese Funktion kann nun partiell nach V bzw. T abgeleitet werden. Durch Anwenden der gewohnten Ableitungsregeln für eindimensionale Funktionen erhält man

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}.$$

Das Zusammenenfassen aller partiellen Ableitungen zu einem Vektor führt auf folgende

Definition 3.3.8 (Gradient). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion in zwei Veränderlichen x, y. Definiere den *Gradient* von f als den Zeilenvektor

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Das Zeichen ∇ steht für den sogenannten *Nabla-Operator*.

Bemerkung 3.3.9. Manchmal wird der Gradient auch als Spaltenvektor geschrieben. Die Definition als Zeilenvektor wird sich jedoch in Definition 3.3.15 als sinnvoll – weil leichter verallgemeinerbar – herausstellen.

Satz 3.7 (Zusammenhang zwischen totaler und partieller Differenzierbarkeit). Falls eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in (x_0, y_0) differenzierbar mit

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| \varepsilon(x,y)$$

(entsprechend (3.2)) ist, dann gilt

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{und} \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Umgekehrt gilt: Falls f in (x_0, y_0) partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in (x_0, y_0) stetig sind, dann ist f in (x_0, y_0) (total) differenzierbar.

Beweisskizze. Der erste Teil ergibt sich direkt durch Einsetzen von (3.2) in die Definition 3.3.4 der partiellen Ableitung:

$$\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = a + 0 + \underbrace{\frac{|x-x_0|}{x-x_0}\varepsilon(x,y_0)}_{\to 0},$$

somit ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0} = a.$$

□

Es gibt also einen starken Zusammenhang zwischen totaler und partieller Differenzierbarkeit. Dies motiviert folgende

Definition 3.3.10 (Totales Differential). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion in n Veränderlichen $x_1,\ldots,x_n$. Dann ist das *totale Differential* von f definiert als

$$df := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Für $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in zwei Variablen x und y bedeutet das also

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Bemerkung 3.3.11. Das totale Differential von $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beschreibt die Änderung von $f(x, y)$ bei kleinen Änderungen von x und y. Dies entspricht der Tangentialebene an f in einem Punkt (x, y).

Die partiellen Ableitungen entsprechen also den Steigungen einer Funktion in Koordinatenrichtung (wie im Eindimensionalen). Ebenso kann man die Steigung einer Funktion in einer beliebigen Richtung definieren:

Definition 3.3.12 (Richtungsableitung). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ ein normierter Richtungsvektor, d.h. $\|\vec{r}\| = 1$. Die *Richtungsableitung* von f im Punkt $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{r}$ ist definiert als

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{r}) - f(\vec{x}_0)}{h},$$

sofern der Grenzwert existiert.

Bemerkung 3.3.13. Das entspricht genau der linearen Approximierbarkeit von f im Punkt $\vec{x}_0$ in Richtung r.

Satz 3.8 (Berechnung der Richtungsableitung). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{r}\| = 1$. Dann lässt sich die Richtungsableitung berechnen als

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{r},$$

wobei hier die Multiplikation des Zeilenvektors $\operatorname{grad} f$ mit dem Spaltenvektor $\vec{r}$ gemeint ist. Das Produkt eines Zeilenvektors $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ mit einem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ist als

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

definiert.

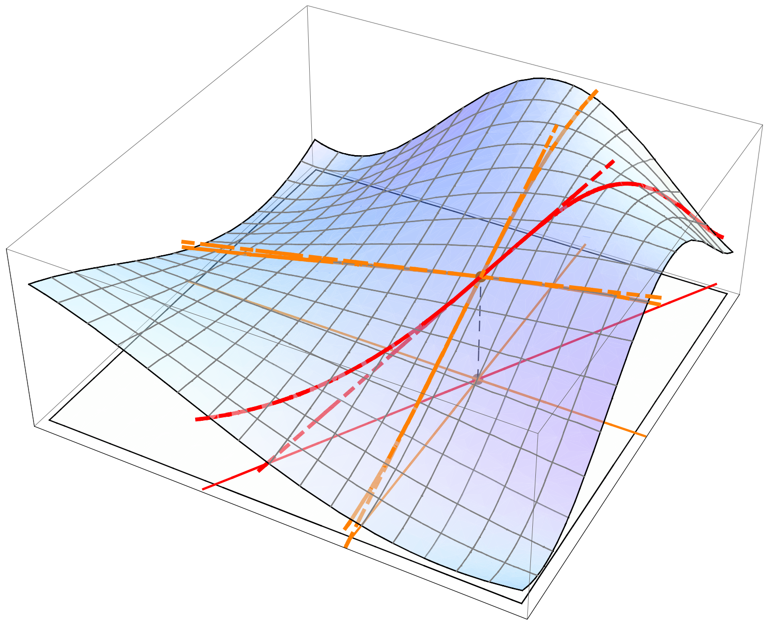


Abbildung 3.4.: Partielle Ableitungen und Richtungsableitung.

Beweis. Sei $\vec{r} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{r}) - f(\vec{x}_0)}{h} \qquad \square$$

Bemerkung 3.3.14. Nach der *Cauchy-Schwarzschen Ungleichung* gilt

$$-\|\operatorname{grad} f\| \leq \operatorname{grad} f \cdot \vec{r} \leq \|\operatorname{grad} f\|$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\operatorname{grad} f$ parallel zu $\vec{r}$ ist. Somit gibt $\operatorname{grad} f$ die Richtung des stärksten Anstiegs und $-\operatorname{grad} f$ die Richtung des stärksten Abstiegs an.

Bis jetzt haben wir nur Funktionen in mehreren Veränderlichen, aber mit einer einzigen „Ergebnisgröße“ betrachtet. Es sind aber auch *vektorwertige Funktionen* denkbar, die mehrere Werte (bzw. einen Vektor) zurückgeben, also Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Solche Funktionen werden prinzipiell komponentenweise betrachtet, wie in folgender

Definition 3.3.15 (Jacobi-Matrix). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare vektorwertige Funktion in n Veränderlichen mit m Werten der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Dann lautet die *Jacobi-Matrix* von f

$$J_f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.3.16. Die Jacobi-Matrix entspricht dem Gradient für $m = 1$ (die Matrix wird zu einem Zeilenvektor) bzw. der gewöhnlichen Ableitung für $m = n = 1$ (die Matrix enthält nur einen einzigen Wert).

Im Eindimensionalen kennen wir bereits die Kettenregel (siehe Satz 3.5), mit der man die Ableitung einer verketteten Funktion (also der *Hintereinanderausführung* mehrerer Funktionen) berechnen kann. Entsprechendes lässt sich auch auf mehrere Dimensionen verallgemeinern:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion in zwei Veränderlichen x, y, und sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion in zwei Veränderlichen u, v. Betrachte die Hintereinanderausführung

$$(f \circ g)(u, v) = f(g(u, v)) = f(x, y) \qquad \text{mit } (x, y) = g(u, v).$$

Die „Koordinaten“ u und v werden also durch g auf x und y transformiert und anschließend wird der Funktionswert von f berechnet. x und y sind somit Funktionen in u und v, d.h. $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$. Ihre totalen Differentiale sind daher

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Das totale Differential von f ist dann

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv. \end{aligned}$$

Es gilt also folgender

Satz 3.9 (Zweidimensionale Kettenregel). Seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen in u, v bzw. x, y mit $(x, y) = g(u, v)$. Dann gilt für die Ableitung der Hintereinanderausführung

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ g)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial (f \circ g)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

Beispiel 3.3.17 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten). Der *Laplace-Operator* Δ ist definiert als die Summe der „reinen“ zweiten partiellen Ableitungen in kartesischen Koordinaten. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in zwei Variablen x, y bedeutet das

$$\Delta f := f_{xx} + f_{yy}.$$

Um den Laplace-Operator in einem anderen Koordinatensystem auszudrücken, müssen die Ableitungen umgerechnet werden.

Sei $f(x, y) = f(r, \varphi)$ die Transformation von f in Polarkoordinaten (siehe Abbildung 2.30), also

$$\begin{aligned} x &= x(r, \varphi) = r \cos\varphi, \\ y &= y(r, \varphi) = r \sin\varphi. \end{aligned}$$

Dann gilt aufgrund der Kettenregel

$$\begin{aligned} f_x &= f_r r_x + f_\varphi \varphi_x, \\ f_y &= f_r r_y + f_\varphi \varphi_y, \end{aligned}$$

somit folgt für die höheren Ableitungen durch Ketten- und Produktregel

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_r r_x)_x + (f_\varphi \varphi_x)_x = f_{rx} r_x + f_r r_{xx} + f_{\varphi x} \varphi_x + f_\varphi \varphi_{xx} \\ &= f_{rr} r_x^2 + 2 f_{r\varphi} \varphi_x r_x + f_r r_{xx} + f_{\varphi\varphi} \varphi_x^2 + f_\varphi \varphi_{xx} \end{aligned}$$

(beachte $f_{rx} = f_{rr} r_x + f_{r\varphi} \varphi_x$ aufgrund der Kettenregel) und analog

$$f_{yy} = f_{rr} r_y^2 + 2 f_{r\varphi} \varphi_y r_y + f_r r_{yy} + f_{\varphi\varphi} \varphi_y^2 + f_\varphi \varphi_{yy}.$$

Die partiellen Ableitungen von r und φ nach x und y sind (in r und φ ausgedrückt)

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r} = \frac{r \cos\varphi}{r} = \cos\varphi, \\ r_{xx} &= \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} r_x = \frac{1}{r} - \frac{r \cos^2\varphi}{r^2} = \frac{1 - \cos^2\varphi}{r}, \\ r_y &= \frac{y}{r} = \frac{r \sin\varphi}{r} = \sin\varphi, \\ r_{yy} &= \frac{1}{r} - \frac{r \sin^2\varphi}{r^2} = \frac{1 - \sin^2\varphi}{r}, \\ \varphi_x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \\ \varphi_{xx} &= -y \left(-\frac{2}{r^3} r_x\right) = \frac{2xy}{r^4} = \frac{2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2}, \\ \varphi_y &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r}, \\ \varphi_{yy} &= -\frac{2xy}{r^4} = -\frac{2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in f_{xx} und f_{yy} liefert das

$$\begin{aligned}
\Delta f =& f_{xx} + f_{yy} = \\
=& f_{rr}\left(r_x^2 + r_y^2\right) + 2 f_{r\varphi}\left(\varphi_x r_x + \varphi_y r_y\right) + f_r(r_{xx} + r_{yy}) + f_{\varphi\varphi}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + f_\varphi(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) = \\
=& f_{rr}\underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}_{=1} + 2 f_{r\varphi}\underbrace{\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\cos\varphi + \frac{\cos\varphi}{r}\cdot\sin\varphi\right)}_{=0} + \\
&+ f_r\underbrace{\left(\frac{1-\cos^2\varphi}{r} + \frac{1-\sin^2\varphi}{r}\right)}_{=\frac{1}{r}} + f_{\varphi\varphi}\underbrace{\left(\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{r^2}\right)}_{=\frac{1}{r^2}} + \\
&+ f_\varphi\underbrace{\left(\frac{2\cos\varphi\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\right)}_{=0} \\
=& f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi}.
\end{aligned}$$

3.4. Regel von de L'Hospital

In Abschnitt 2.3 haben wir gesehen, dass gewisse unbestimmte Ausdrücke wie $\frac{0}{0}$ nicht unmittelbar ausgewertet werden dürfen (siehe speziell Bemerkung 2.3.5). Gibt es eine allgemeine Vorgangsweise, wie man mit so einem Fall umgehen kann?

Seien $f,\ g : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare (und damit stetige) Funktionen und $x_0 \in U$ mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Aufgrund der linearen Approximierbarkeit können $f(x)$ und $g(x)$ geschrieben werden als

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0) R(x)$$

bzw.

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0) g'(x_0) + (x - x_0) S(x)$$

mit $\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = 0$. Eingesetzt in $\frac{f(x)}{g(x)}$ ergibt das (unter der Annahme, dass der neue Grenzwert existiert)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0) R(x)}{g(x_0) + (x - x_0) g'(x_0) + (x - x_0) S(x)},$$

nun folgt wegen der Stetigkeit von f und g, dass $f(x_0) = g(x_0) = 0$, also erhalten wir

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0) + R(x)}{g'(x_0) + S(x)}\cdot\underbrace{\frac{x - x_0}{x - x_0}}_{=1}$$

und damit wegen $\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = 0$ das Ergebnis

$$= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Diese Vorgangsweise kann auf die Fälle $\frac{\infty}{\infty}$ und $x_0 = \pm\infty$ erweitert werden und führt auf folgenden

Satz 3.10 (Regel von de L'Hospital). Seien f, $g : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reelle, differenzierbare Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Falls

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

gilt und

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, folgt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Diese Regel ist benannt nach Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital (1661–1704).

Beispiel 3.4.1. Betrachte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{20x+17}{5x+9},$$

also $f(x) = 20x+17$, $g(x) = 5x+9$, beides differenzierbare Funktionen mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Es folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{20x+17}{5x+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{20}{5} = 4.$$

Das hätte man natürlich auch ohne Regel von de L'Hospital durch Kürzen der höchsten Potenzen von x sehen können:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{20x+17}{5x+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{20+\frac{17}{x}}{5+\frac{9}{x}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Beispiel 3.4.2. Betrachte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

(vgl. Satz 2.8). Es gilt $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} x = 0$, es liegt also ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ vor. Wende die Regel von de L'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = „\tfrac{0}{0}“ \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Die Aussage des Satzes haben wir so also in einfacher Weise durch die Regel von de L'Hospital bewiesen. (Allerdings haben wir hier die Information über die Ableitung des Sinus verwendet, die ihrerseits wieder Satz 2.8 erforderte. Die damaligen Überlegungen waren also nicht umsonst.)

Beispiel 3.4.3. Betrachte

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

(vgl. Bemerkung 2.4.12). Der Ausdruck $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ kann mittels Exponentialfunktion umgeschrieben werden als

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp\left(x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)$$

Nun gilt aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to\infty}\exp\left(x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)\right).$$

(Der Grenzwert kann aufgrund der Stetigkeit „in die Funktion hineingezogen" werden.) Zu untersuchen bleibt also

$$\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{a}{x}\right).$$

Es gilt $\lim_{x\to\infty}x=\infty$ und $\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{a}{x}\right)=\log 1=0$, es handelt sich also um einen unbestimmten Ausdruck der Form $\infty\cdot 0$. Durch Umschreiben auf einen „künstlichen" Bruch erhalten wir nun einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ und können die Regel von de L'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{a}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = „\frac{0}{0}\text{“} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-ax^2}{-\left(1+\frac{a}{x}\right)x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+\underbrace{\frac{a}{x}}_{\to 0}} = a.\end{aligned}$$

Damit gilt nun insgesamt

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp\left(\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)\right) = \exp(a) = e^a.$$

Bemerkung 3.4.4. Wie bereits im vorigen Beispiel veranschaulicht, können verschiedenste unbestimmte Ausdrücke durch Umformen auf die Formen $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ gebracht werden:

1. $0\cdot\infty$, also $\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$ mit $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ und $\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty$:

   Es kann ein Bruch der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ konstruiert werden:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = „\tfrac{0}{0}\text{“}$$

bzw.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = „\tfrac{\infty}{\infty}“.$$

2. $\infty - \infty$, also $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x)$ mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$:

   Indem die Kehrwerte von $f(x)$ und $g(x)$ auf gemeinsamen Nenner gebracht werden, entsteht ein Bruch der Form $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} = „\tfrac{0}{0}“.$$

3. 1^∞, 0^0, ∞^0, also unbestimmte Ausdrücke mit Potenzen:

   Durch Umschreiben auf die Exponentialfunktion und unter Berücksichtigung ihrer Stetigkeit kann die Potenz im Grenzwert eliminiert werden:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \exp\left(g(x)\log\left(f(x)\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\log\left(f(x)\right)\right).$$

   Nachdem der „innere“ Grenzwert berechnet ist, ergibt sich das Gesamtergebnis durch exponentieren bzw. mittels

$$„\exp(-\infty) = 0“ \quad \text{bzw.} \quad „\exp(\infty) = \infty“.$$

3.5. Taylorreihen

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in U$ differenzierbare Funktion. Dann gilt aufgrund der linearen Approximierbarkeit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)R_1(x) \tag{3.3}$$

mit

$$\lim_{x\to x_0} R_1(x) = 0. \tag{3.4}$$

Das bedeutet

$$R_1(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

und somit nach der Quotientenregel

$$R_1'(x) = \frac{\left(f'(x) - f'(x_0)\right)(x - x_0) - \left(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\right)}{(x - x_0)^2}.$$

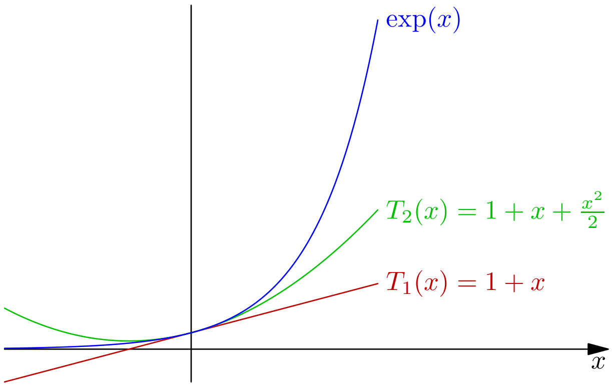


Abbildung 3.5.: Approximation von $\exp(x)$ durch die Taylorpolynome 1. und 2. Ordnung.

Betrachtet man nun den Grenzwert für $x \to x_0$, ergibt sich der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$. Durch Anwendung der Regel von de L'Hospital erhält man schließlich

$$\lim_{x \to x_0} R_1'(x) = „\tfrac{0}{0}“ = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)(x - x_0) + f'(x) - f'(x)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Unter der Annahme, dass R_1 differenzierbar ist (also f zweimal differenzierbar), kann man auch R_1 in x_0 linear approximieren:

$$R_1(x) = R_1(x_0) + R_1'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)R_2(x), \tag{3.5}$$

wobei $R_1(x_0) = 0$ wegen (3.4) und $\lim_{x \to x_0} R_2(x) = 0$. In (3.3) eingesetzt ergibt das insgesamt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 R_2(x).$$

Lässt man den „Fehler“' $R_2(x)$ weg, erhält man so also eine *quadratische Approximation* von f in x_0 (siehe Abbildung 3.5), d.h.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Dieser Vorgang kann nun fortgesetzt werden: Aus (3.5) ergibt sich

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \frac{R_1(x) - R_1'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} \end{aligned}$$

und daraus wiederum

$$R_2'(x) = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{(x - x_0)^2} - 2 \cdot \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^3},$$

somit durch mehrmalige Anwendung der Regel von de L'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} R_2'(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f''(x)}{2(x-x_0)} - 2\cdot\frac{f'(x)-f'(x_0)}{3(x-x_0)^2}\right)\\
&= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f''(x)}{2(x-x_0)} - 2\cdot\frac{f''(x)}{6(x-x_0)}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{6(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'''(x)}{6}\\
&= \frac{f'''(x_0)}{6}.
\end{aligned}$$

Mit der linearen Approximation

$$R_2(x) = R_2(x_0) + R_2'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)R_3(x)$$

führt das auf die Darstellung

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3+(x-x_0)^3R_3(x),$$

also auf eine Approximation 3. Ordnung von f.

Definition 3.5.1 (Taylor-Polynom). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Dann ist das n-te *Taylor-Polynom* von f in $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert als

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.
\end{aligned}$$

(Beachte $0! = 1$ und $f^{(0)} = f$.)

Bemerkung 3.5.2. Manchmal ist der Fehler der Approximation von f durch T_n für $n \to \infty$ so klein, dass f als eine unendliche *Taylorreihe* geschrieben werden kann. Das ist etwa bei den Funktionen exp, sin, cos und ln (dort aber nur für $0 < x \leq 2$) der Fall. Es gilt

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots && \text{(vgl. Definition 2.4.10)},\\
\ln(1+x) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots && \text{für } -1 < x \leq -1,\\
\cos(x) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots,\\
\sin(x) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots.
\end{aligned}$$

Aus den Definitionen $\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$ ergibt sich unmittelbar

$$\cosh(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

$$\sinh(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

Auch zwischen exp, sin und cos scheint ein starker Zusammenhang zu bestehen. Betrachtet man die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp(iy) = \sum_{n\geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!},$$

erkennt man

$$\exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y).$$

Weiters kann man, ähnlich zum Binomischen Lehrsatz (Satz 1.3), die Reihenentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{für } |x| < 1$$

zeigen (die sogenannte *Binomische Reihe*), wobei der *verallgemeinerte Binomialkoeffizient* definiert ist als

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

Für $\alpha = -1$ und $-x$ statt x entspricht das der bekannten geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n,$$

denn es gilt

$$\binom{-1}{n}(-x)^n = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdots(-n)}{n!}(-x)^n = \frac{(-1)^n n!}{n!}(-1)^n x^n = x^n.$$

Die Reihenentwicklung von Funktionen kann etwa bei Grenzwertberechnungen nützlich sein, wie in folgendem

Beispiel 3.5.3. Berechne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{\cosh x - 1 - \frac{x^2}{2}}.$$

Der Wert von Zähler und Nenner ist für $x = 0$ gleich 0, es liegt also ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ vor und wir können die Regel von de L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{\cosh x - 1 - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sinh x - x},$$

wir erhalten also wieder einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$. Nochmaliges Anwenden von de L'Hospital liefert

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{\cosh x - 1},$$

also noch einmal $\frac{0}{0}$ und mittels de L'Hospital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{\sinh x},$$

somit nach der vierten Anwendung der Regel von de L'Hospital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cosh x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Unter Verwendung der Taylorreihen von sin und cosh können wir den Ausdruck andererseits umschreiben als

$$\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{\cosh x - 1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \cdots}{\frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots}.$$

So erhalten wir nach dem Kürzen der höchsten Potenz von x

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{\cosh x - 1 - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\frac{x}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \frac{x^5}{9!} - + \cdots}^{\to 0}}{\frac{1}{4!} + \underbrace{\frac{x^2}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \cdots}_{\to 0}} = \frac{0}{\frac{1}{24}} = 0.$$

3.6. Kurvendiskussion

Unter einer Kurvendiskussion versteht man das Berechnen bestimmter Eigenschaften einer Funktion, wie Monotonie, Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten, Wendepunkte, Polstellen, Verhalten im Unendlichen, usw. Manche dieser Eigenschaften können vielleicht direkt aus dem Graphen der Funktion „abgelesen“ werden, allerdings können nur durch eine formale Berechnung die entsprechenden exakten Werte herausgefunden werden. Abgesehen davon ist die Kenntnis der Eigenschaften eine Voraussetzung dafür, überhaupt einen adäquaten Graphen skizzieren zu können.

3.6.1. Definitionsbereich

Ist nur die Zuordnungsvorschrift einer Funktion f, nicht aber ihr Definitionsbereich gegeben, sucht man zuerst den *maximalen* Definitionsbereich, also die „größtmögliche“ Menge $D \subseteq \mathbb{R}$, sodass f auf D definiert ist. Dazu sucht man wiederum Werte, für die f *nicht* definiert ist, also z.B. Nullstellen von Nennern, negative Argumente von geraden Wurzeln, Argumente ≤ 0 von Logarithmen, bzw. beachte man Definitionsmengen der Arcus- bzw. Area-Funktionen.

3.6.2. Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion f sind jene Werte x im Definitionsbereich, für die

$$f(x) = 0$$

gilt (vgl. Definition 2.1.5). Zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen siehe Abschnitt 1.3.

3.6.3. Extremwerte

Definition 3.6.1 (Lokale und globale Extrema). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt *lokales Minimum* von f, wenn es eine Umgebung $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, von x_0 gibt, sodass

$$f(x) \geq f(x_0)$$

für alle $x \in I$ gilt. Entsprechend heißt $x_0 \in U$ *lokales Maximum*, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I$ gilt.

Wenn die Bedingungen nicht nur einer Umgebung von x_0, sondern im gesamten Definitionsbereich von f gelten, spricht man von einem globalen Extremum: $x_0 \in U$ ist also ein *globales Minimum*, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U$, bzw. ein *globales Maximum*, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$ gilt.

Satz 3.11 (Notwendiges Kriterium für ein lokales Extremum). Sei f differenzierbar auf D und sei x_0 ein lokales Extremum im Inneren von D. Dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweisskizze. Die Tangente in x_0 muss horizontal sein, sonst könnte man links oder rechts von x_0 einen größeren bzw. kleineren Wert als $f(x_0)$ erhalten. Die Steigung der Tangente ist aber genau

$$f'(x_0) = 0.$$

□

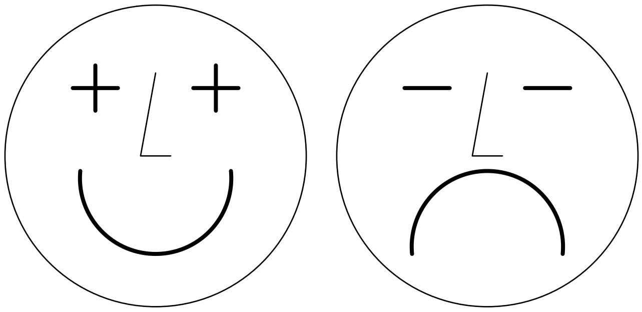
Bemerkung 3.6.2. Der Satz beschreibt eine *notwendige* Bedingung für das Vorliegen eines Extremums. Umgekehrt folgt aus $f'(x_0) = 0$ nicht notwendigerweise, dass in x_0 ein Extremum vorliegt. Zum Beispiel gilt für $f(x) = x^3$ mit $f'(x) = 3x^2$, dass $f'(0) = 0$; in $x_0 = 0$ liegt aber kein Extremum vor – es handelt sich um einen sogenannten „Sattelpunkt“ (siehe Abbildung 2.6).

Um ein *hinreichendes* Kriterium zu erhalten, betrachte die Taylorentwicklung von f in einem Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ (siehe Abbildung 3.5):

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{Punkt}} + \underbrace{(x - x_0)f'(x_0)}_{\text{Tangente}} + \frac{1}{2}\underbrace{(x - x_0)^2 f''(x_0)}_{\text{Parabel}} + \underbrace{(x - x_0)^2 R_2(x)}_{\text{klein}}.$$

Dabei stellt $f(x_0)$ einen Punkt dar, $(x - x_0)f'(x_0)$ die Tangente an f in x_0, die ja gemäß notwendiger Bedingung horizontal sein muss, und $(x-x_0)^2 f''(x_0)$ ist eine Parabel. Wenn nun $f''(x_0) > 0$ ist, ist diese Parabel nach oben offen, während der Fehlerterm $(x - x_0)^2 R_2(x)$ für $x \to x_0$ vernachlässigbar klein wird. In einer Umgebung von x_0 sind dann also alle anderen Funktionswerte $f(x)$ größer als $f(x_0)$, somit ist x_0 ein lokales Minimum. Analog ist x_0 ein lokales Maximum, wenn $f''(x_0) < 0$. Das wird ausgedrückt in folgendem

Satz 3.12 (Hinreichendes Kriterium für ein lokales Extremum). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und x_0 im Inneren von U mit $f'(x_0) = 0$. Wenn zusätzlich $f''(x_0) > 0$ gilt, liegt in x_0 ein lokales Minimum vor. Wenn $f''(x_0) < 0$ gilt, liegt in x_0 ein lokales Maximum vor.



(a) Minimum (b) Maximum

Abbildung 3.6.: Merkhilfe zum Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen von f'' und der Art des Extremwerts. (Der Extremwert befindet sich an der Zungenspitze.)

Bemerkung 3.6.3. Es gilt allgemeiner: Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion, $n \geq 2$, x_0 im Inneren von U und es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Wenn n ungerade ist und $f^{(n)}(x_0) > 0$ (bzw. < 0), so liegt in x_0 ein lokales Minimum (bzw. lokales Maximum) vor.

Ist n gerade, so liegt in x_0 kein Extremum vor.

3.6.4. Monotonie

Monotonie wurde bereits in Definition 2.2.1 definiert. Ist die zu untersuchende Funktion differenzierbar, ist auch eine andere Charakterisierung möglich:

Proposition 3.6.4. Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist f genau dann monoton steigend auf einem Intervall $I \subseteq U$, wenn

$$f'(x) \geq 0$$

für alle $x \in I$ gilt. Entsprechend ist sie streng monoton steigend, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Die Funktion f ist genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$, bzw. streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$.

Bemerkung 3.6.5. Die Monotonieintervalle einer Funktion f können also durch Lösen der Ungleichungen (vgl. Abschnitt 1.6) $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ bestimmt werden. Alternativ dazu kann, sofern f' stetig ist, ausgenutzt werden, dass die Monotonieintervalle genau zwischen Punkten mit $f'(x) = 0$ sind. Um zu sehen, ob auf einem Intervall $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ gilt, reicht es dann, einen beliebigen Punkt im Intervall in f' einzusetzen.

3.6.5. Krümmung

Definition 3.6.6 (Krümmung). Eine zweimal differenzierbare Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *positiv (links) gekrümmt* oder *konvex* auf einem Intervall $I \subseteq U$, wenn

$$f''(x) > 0$$

für alle $x \in I$ gilt. Die Funktion f heißt *negativ (rechts) gekrümmt* oder *konkav* auf I, wenn

$$f''(x) < 0$$

für alle $x \in I$ gilt.

Bemerkung 3.6.7. Die Krümmung gibt die *Richtungsänderung* einer Funktion an.

3.6.6. Wendepunkte

Definition 3.6.8 (Wendepunkt). Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt *Wendepunkt* von f, wenn sich das Krümmungsverhalten von f in x_0 ändert, wenn sich also das Vorzeichen von $f''(x)$ in x_0 ändert.

Proposition 3.6.9. In einem Wendepunkt x_0 gilt $f''(x_0)$.

Proposition 3.6.10. Wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ gilt, liegt in x_0 ein Wendepunkt vor. (Der Punkt x_0 ist dann ein lokales Extremum von f'.)

Definition 3.6.11 (Sattelpunkt). Ein Wendepunkt x_0 von f mit $f'(x_0) = 0$ heißt *Sattelpunkt*.

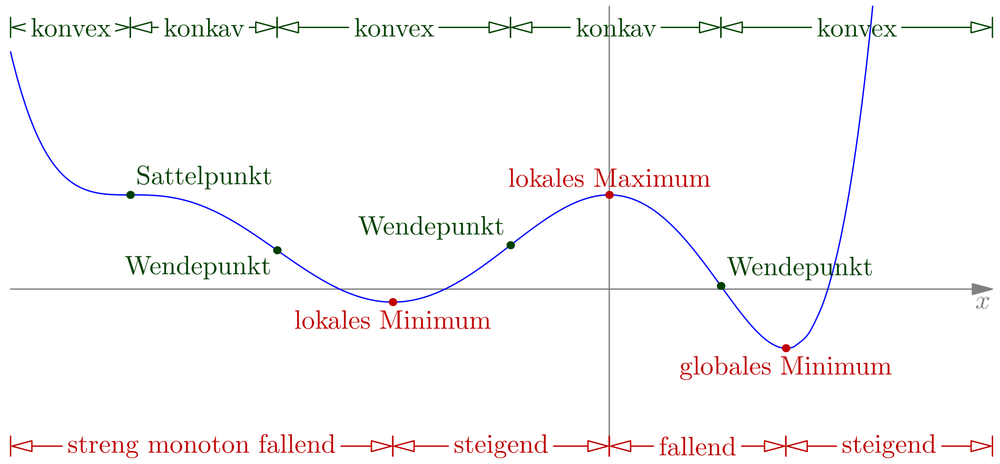


Abbildung 3.7.: Extrema, Wendepunkte, Monotonie und Krümmung.

3.6.7. Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

Es sind die Grenzwerte der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs zu bestimmen, gegebenenfalls auch für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$.

Beispiel 3.6.12 (Kurvendiskussion). Diskutiere die Funktion

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 2).$$

1. Der *Definitionsbereich* von f ist $\mathbb{R}$.

2. Für *Nullstellen* von f muss

$$\begin{aligned} & & f(x) &= 0 & \\ &\Leftrightarrow & e^{-x}(x^2 + 2x + 2) &= 0 & \quad | : e^{-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow & x^2 + 2x + 2 &= 0 & \\ &\Leftrightarrow & (x+1)^2 + 1 &= 0 & \end{aligned}$$

gelten. Wegen $(x+1)^2 + 1 \geq 0 + 1 > 0$ hat diese Gleichung aber keine Lösung in $\mathbb{R}$, die Funktion f hat also keine reellen Nullstellen.

3. Um die *Extrema* zu berechnen, ermittle zunächst die ersten drei Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x}(2x + 2) = -x^2 e^{-x}, \\ f''(x) &= e^{-x}(x^2 - 2x), \\ f'''(x) &= e^{-x}(-x^2 + 4x - 2). \end{aligned}$$

Kandidaten für lokale Extrema im Inneren des Definitionsbereichs ergeben sich also aus

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 e^{-x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0, \\ f'''(0) &= -2 < 0. \end{aligned}$$

Die 3. Ableitung ist also die „erste“ Ableitung ungleich 0; weil 3 ungerade ist, liegt in $x = 0$ kein Extremum vor (siehe Bemerkung 3.6.3).

4. Zur Untersuchung der *Monotonie* gibt es zwei Möglichkeiten:
   a) Es gilt
   $$f'(x) = -\underbrace{x^2}_{\geq 0}\underbrace{e^{-x}}_{>0} \leq 0,$$
   somit ist f monoton fallend auf $\mathbb{R}$.
   b) Die Funktion f hat keine Extrema und f' ist stetig, somit ist f überall monoton fallend oder überall monoton wachsend (siehe Bemerkung 3.6.5). Durch Einsetzen eines beliebigen Wertes, z.B.
   $$f'(1) = -1^2 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0,$$
   kann man feststellen, dass f auf $\mathbb{R}$ monoton fallend ist.

5. Die Kandidaten für *Wendepunkte* ergeben sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned} & f''(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{-x}(x^2 - 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2. \end{aligned}$$

Es gilt

$$f'''(0) = -2 \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad f'''(2) = e^{-2}(2) > 0,$$

daher sind 0 und 2 Wendepunkte. Im Punkt 0 hat f eine horizontale Wendetangente (siehe Punkt 3). Im Punkt 2 gilt

$$f'(2) = -4e^{-2} \quad \text{und} \quad f(2) = e^{-2}(4+4+2) = \frac{10}{e^2},$$

die Wendetangente ist somit

$$y = \frac{10}{e^2} - 4e^{-2}(x-2).$$

6. Um das *Krümmungsverhalten* zu untersuchen, gibt es wie bei der Monotonie zwei Möglichkeiten:

   a) Betrachte die Ungleichung

   $$\begin{aligned} & & f''(x) &> 0 \\ &\Leftrightarrow & (x^2-2x)e^{-x} &> 0 \\ &\Leftrightarrow & x^2-2x &> 0 \\ &\Leftrightarrow & x(x-2) &> 0 \\ &\Leftrightarrow & (x>0 \text{ und } x-2>0) & \quad\text{oder}\quad (x<0 \text{ und } x-2<0) \\ &\Leftrightarrow & x>2 & \quad\text{oder}\quad x<0. \end{aligned}$$

   Das ist der Bereich, auf dem f konvex ist, also auf $(-\infty, 0)$ und auf $(2, \infty)$. Auf $(0, 2)$ ist f hingegen konkav.

   b) Die Funktion f hat Wendepunkte bei 0 und 2, es sind also die drei Intervalle $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ und $(2, \infty)$ zu untersuchen. Es gilt

   $$f''(1) = e^{-1}(1-2) = -\frac{1}{e} < 0,$$

   somit ist f in $(0, 2)$ konkav. Da 0 und 2 „echte“ Wendepunkte sind (es gilt nicht nur $f''(x) = 0$), ändert sich dort das Krümmungsverhalten, somit ist f auf $(-\infty, 0)$ und auf $(2, \infty)$ konvex.

7. Am *Rand des Definitionsbereichs* $\mathbb{R}$ gilt

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \underbrace{(x^2+2x+2)}_{\to\infty} &= \text{„}0\cdot\infty\text{“} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+2}{e^x} \\ &= \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{e^x} \\ &= \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

   (siehe Satz 3.10) bzw.

   $$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to\infty} \underbrace{(x^2+2x+2)}_{\to\infty} = \infty.$$

Eine entsprechender Graph der Funktion f ist in Abbildung 3.8 zu sehen.

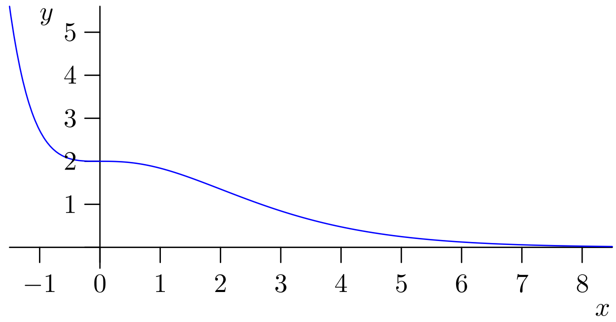


Abbildung 3.8.: Funktion $f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$.

3.7. Notwendige Bedingungen für Extrema im $\mathbb{R}^d$

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion in mehreren Veränderlichen. Wie kann man hier lokale Extrema finden? Im Eindimensionalen gibt es ja die notwendige Bedingung, dass die erste Ableitung 0 sein muss. Betrachte in ähnlicher Weise die Taylorentwicklung von f, der Einfachheit halber in zwei Variablen x, y (also $d = 2$):

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + R.$$

Wenn f in $\vec{x}_0$ ein lokales Extremum hat, dann muss dort $\operatorname{grad} f = \vec{0}$ gelten, weil die Tangentialebene parallel zur Ebene $z = 0$ sein muss. Es handelt sich dabei also um ein *notwendiges Kriterium* für das Vorliegen eines lokalen Extremums. Punkte mit $\operatorname{grad} f = \vec{0}$ heißen *stationäre Punkte*. Ob diese wirklich Extreme sind (*hinreichendes Kriterium*), wird hier noch nicht weiter behandelt.

Beispiel 3.7.1. Betrachte die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 24y + 2153.$$

Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 10y - 24.$$

Setze beide Terme gleich 0 und erhalte so $x = 2y$ und aus $2y - 24 = 0$ weiters $y = 12$, also $x = 24$. In $f(24, 12) = 2009$ liegt also ein stationärer Punkt vor.

4. Integration

4.1. Bestimmtes Integral

Während es beim Differenzieren um die *Steigung* einer Funktion in einem bestimmten Punkt gegangen ist, geht es nun um eine andere Fragestellung: Wie groß ist der *Flächeninhalt* „unter" einer Funktion in einem bestimmten Bereich?

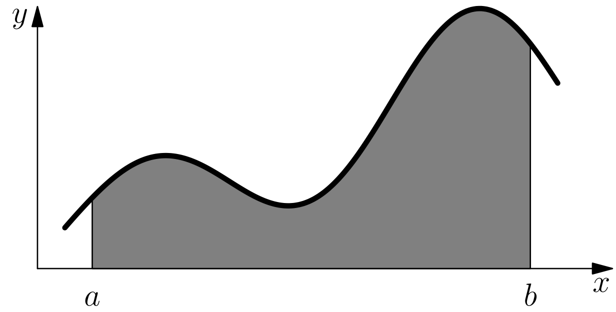


Abbildung 4.1.: Flächeninhalt unter einer Kurve.

Definition 4.1.1. Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $[a, b] \subseteq U$ ein Intervall im Definitionsbereich. Dann bezeichnet das *bestimmte Integral* von a nach b über f

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

den orientierten Flächeninhalt unter der Kurve (bildlich gesprochen zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion).

Dabei heißen a und b *Integrationsgrenzen*, x *Integrationsvariable* und die Funktion $f(x)$ wird als *Integrand* bezeichnet.

Bemerkung 4.1.2. *Orientiert* bedeutet in dem Fall, dass Flächenstücke unter der x-Achse negativ zählen, und dass für $a > b$ das Vorzeichen umgedreht wird (siehe Aussage 3 der nachfolgenden Proposition 4.1.5).

Beispiel 4.1.3. Die physikalische Arbeit W ist bei Kraft F und Weglänge s gegeben als

$$W = F \cdot s.$$

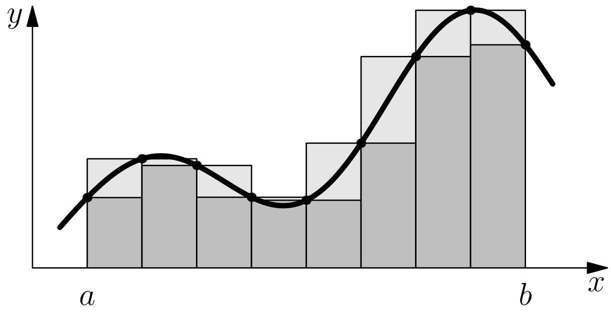


Abbildung 4.2.: Ober- und Untersumme.

Wenn sich die Kraft entlang des Weges ändert, kann die Arbeit als Flächeninhalt unter der Kraftfunktion $F(s)$ berechnet werden. Für einen Wegabschnitt $[a, b]$ gilt dann

$$W = \int_a^b F(s)\, ds.$$

Bemerkung 4.1.4. Um die Fläche zu berechnen, wird das Intervall $[a, b]$ in viele (kleine) Teile unterteilt und jeweils ein Rechteck von der x-Achse bis zum Minimum bzw. bis zum Maximum in einem Teil gelegt. Die Summe der Flächeninhalte dieser Rechtecke wird als *Ober-* bzw. *Untersumme* bezeichnet (siehe Abbildung 4.2). Dann wird der Grenzübergang für die Feinheit der Unterteilungen (maximaler Abstand zwischen zwei Unterteilungspunkten) gegen 0 gemacht. Wenn Ober- und Untersumme zum selben Wert konvergieren, stellt dieser Wert den Flächeninhalt unter der Funktion dar; ansonsten existiert keine Fläche. (Dies ist dann der Fall, wenn die Funktion f zu viele „Sprünge“ macht.)

Proposition 4.1.5 (Rechenregeln für bestimmte Integrale). Aufgrund der Definition als orientierte Fläche ergeben sich folgende Rechenregeln:

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f(x))\, dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\, dx$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx.$

1. und 2. drücken die *Linearität der Integration* aus.

Folgender Satz stellt nun eine wichtige Verbindung zwischen Ableiten und Integrieren her:

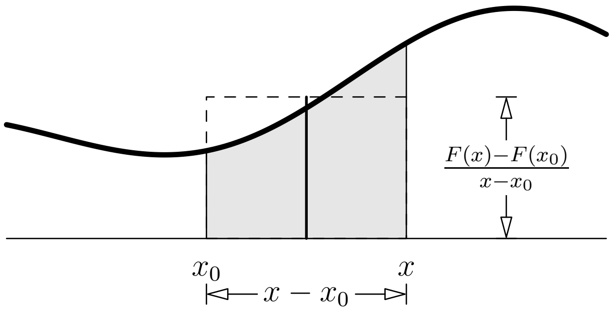


Abbildung 4.3.: Fläche $F(x) - F(x_0)$.

Satz 4.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist für alle $x \in [a,b]$ die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Beweisskizze. $F(x) - F(x_0)$ ist der Flächeninhalt unter f im Intervall $[x_0, x]$ (siehe Abbildung 4.3). Daher ist

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

die durchschnittliche Höhe von f in diesem Intervall. Macht man nun den Abstand zwischen x und x_0 klein, liefert der Quotient eine gute Annäherung an den tatsächlichen Funktionswert von f innerhalb des Intervalls, also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Dieser Grenzwert ist aber genau die Definition der Ableitung von F an der Stelle x_0. $\square$

Bemerkung 4.1.6. Somit ist die Integration (Flächenbestimmung) eine Art Umkehroperation der Differentiation. Dies erleichtert das Berechnen von bestimmten Integralen.

Definition 4.1.7. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion F mit

$$F'(x) = f(x)$$

heißt *Stammfunktion* von f. Schreibe

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

(*unbestimmtes Integral*).

Bemerkung 4.1.8. Wenn es eine Stammfunktion zu einer Funktion gibt, gibt es mehrere. Diese unterscheiden sich aber nur um eine additive Konstante, der sogenannten *Integrationskonstanten*, die meist mit C bezeichnet wird und beim Differenzieren verschwindet. Schreibe daher

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C,$$

um eine allgemeine Stammfunktion anzugeben. Nachdem es auf die Integrationskonstante in den meisten Fällen nicht ankommt, wird oft von *der* Stammfunktion einer Funktion gesprochen, obwohl es streng genommen unendlich viele gibt.

Beispiel 4.1.9 (Integration von Polynomen). Bestimme das unbestimmte Integral

$$\int x^n\,dx \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ konstant.}$$

Gesucht ist also eine Funktion in x, die differenziert x^n ergibt. Aufgrund der Rechenregeln der Differentialrechnung wissen wir, dass

$$\left(x^{n+1}\right)' = (n+1) \cdot x^n$$

gilt. Dividieren wir durch die Konstante $n+1$, steht also das Gewünschte da. Somit gilt

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Aufgrund der Linearität der Integration können Polynome integriert werden:

$$\begin{aligned}\int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\,dx &= a_n \int x^n\,dx + \cdots + a_1 \int x^1\,dx + a_0 \int x^0\,dx \\ &= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C.\end{aligned}$$

Satz 4.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 2. Teil). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bemerkung 4.1.10. Ein bestimmtes Integral kann also leicht durch Einsetzen der Integrationsgrenzen in die Stammfunktion berechnet werden.

Für das Einsetzen von b und a und die Subtraktion wird meist $\Big|_a^b$ geschrieben (siehe folgendes Beispiel).

Beispiel 4.1.11. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_2^5 (4x^3 - 2x + 2)\,dx.$$

Aus Beispiel 4.1.9 wissen wir bereits, dass das unbestimmte Integral

$$\int (4x^3 - 2x + 2)\,dx = x^4 - x^2 + 2x + C$$

ist. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_2^5 (4x^3 - 2x + 2)\,dx &= x^4 - x^2 + 2x\Big|_2^5 = (5^4 - 5^2 + 2\cdot 5) - (2^4 - 2^2 + 2\cdot 2)\\ &= 610 - 16 = 594.\end{aligned}$$

Ähnlich wie in Beispiel 4.1.9 kann eine ganze Reihe von Integralen berechnet werden, indem anhand der bekannten Differentiationsregeln auf die Stammfunktion geschlossen wird. Hier eine Übersicht über die wichtigsten Funktionen und ihre Stammfunktionen (ohne Integrationskonstante C):

$f(x)$	$F(x)$
c	cx
x^n mit $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\log_a x$	$\frac{x\ln x - x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\frac{x^2}{x^2+1}$	$x - \arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln\lvert\cosh x\rvert$
$\coth x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ mit $x > 1$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{1}{1-x^2}$ mit $\lvert x\rvert < 1$	$\operatorname{artanh} x$
$\frac{1}{1-x^2}$ mit $\lvert x\rvert > 1$	$\operatorname{arcoth} x$

Dabei sind c, n und a von x unabhängige Konstanten.

Beispiel 4.1.12. Betrachte die Funktion

$$f(x) = 12 + x + 2010x^3 + \sin 11x + e^{3x} + \frac{1}{1+x^2}.$$

Eine Stammfunktion von f ist

$$\begin{aligned}\int f(x)\ dx &= \int 12\ dx + \int x\ dx + \int 2010x^2\ dx + \int \sin 11x\ dx + \int e^{3x}\ dx + \int \frac{1}{1+x^2}\ dx\\ &= 12\int 1\ dx + \int x\ dx + 2010\int x^2\ dx + \int \sin 11x\ dx + \int e^{3x}\ dx + \int \frac{1}{1+x^2}\ dx\\ &= 12x + \frac{1}{2}x^2 + 2010\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{11}(-\cos 11x) + \frac{1}{3}e^{3x} + \arctan x + C.\end{aligned}$$

(Beachte die Konstanten $\frac{1}{11}$ bzw. $\frac{1}{3}$, die hinzumultipliziert werden müssen, um den Faktor zu „korrigieren“, der beim Ableiten durch die innere Ableitung entstehen würde; vgl. Satz 3.5.)

4.2. Anwendungen der Integralrechnung

4.2.1. Flächenberechnung

Das bestimmte Integral ist definiert als eine *orientierte* Fläche, d.h. Flächen „im Negativen“ zählen negativ. Will man die „gewöhnliche“ (also unorientierte) Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse berechnen, müssen also die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse berechnet und die einzelnen Abschnitte extra integriert werden. Die Fläche ergibt sich als Summe der Beträge der Teilintegrale.

Beispiel 4.2.1. Berechne die von der Funktion $f(x) = x^2+4x+3$, der x-Achse, $x = -3$ und der y-Achse eingeschlossene Fläche (siehe Abbildung 4.4).

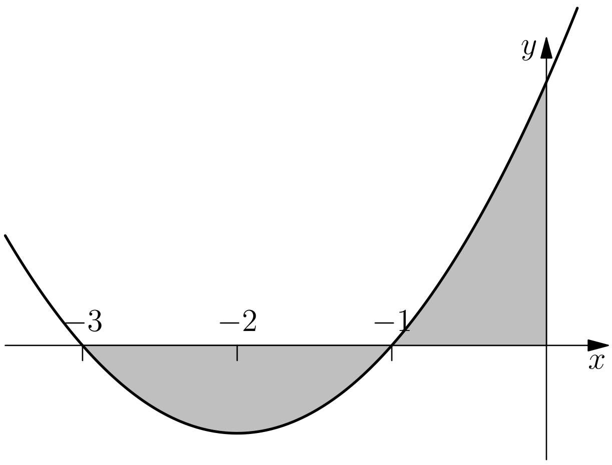


Abbildung 4.4.: Fläche zwischen $f(x)$ und x-Achse.

Die Schnittpunkte von $f(x)$ mit der x-Achse sind die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 4x + 3 = 0,$$

also $x_1 = -3$ und $x_2 = -1$. Die gesuchte Fläche ist daher

$$\begin{aligned}
F &= \left| \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \right| \\
&= \left| \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right|_{x=-3}^{-1} + \left| \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right|_{x=-1}^{0} \\
&= \left| -\frac{4}{3} - 0 \right| + \left| 0 + \frac{4}{3} \right| \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.2.2. Würde man in obigem Beispiel die Schnittpunkte der Funktion mit der x-Achse ignorieren und „drüberintegrieren“, erhielte man als vermeintliche Fläche das Integral

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = 0,$$

was offensichtlich nicht stimmen kann.

Bemerkung 4.2.3. Die Fläche zwischen zwei beliebigen Funktionen kann berechnet werden, indem man zuerst die Schnittpunkte der Funktionen ermittelt und dann die Integrale der Differenz über die entsprechenden Abschnitte berechnet.

Beispiel 4.2.4. Berechne die Fläche, die von den Funktionen

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 2$$

und

$$g(x) = -3x^3 + 12x^2 + 14x - 22$$

eingeschlossen wird (siehe Abbildung 4.5).

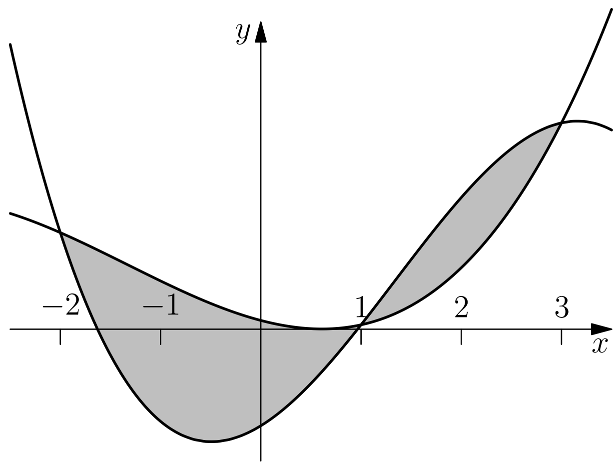


Abbildung 4.5.: Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$

Die Schnittpunkte der Funktionen ergeben sich als Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \iff f(x) - g(x) &= 0 \\ \iff 4x^3 - 8x^2 - 20x + 24 &= 0. \end{aligned}$$

Durch geschicktes Raten und Polynomdivision findet man $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$. Die gesuchte Fläche ist also

$$\begin{aligned}
F &= \left|\int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx\right| + \left|\int_{1}^{3} (f(x) - g(x))\, dx\right| \\
&= \left| x^4 - \frac{8x^3}{3} - 10x^2 + 24x \right|_{x=-2}^{1} + \left| x^4 - \frac{8x^3}{3} - 10x^2 + 24x \right|_{x=1}^{3} \\
&= \left|\frac{37}{3} + \frac{152}{3}\right| + \left|-9 - \frac{37}{3}\right| \\
&= \frac{253}{3}.
\end{aligned}$$

4.2.2. Arbeit

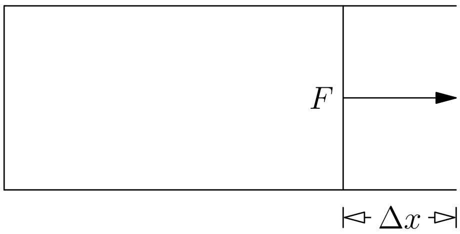


Abbildung 4.6.: Arbeit durch Gasdruck

Betrachte ein Gas mit Druck p in einem geschlossenen Behälter, an den ein Kolben mit beweglichem Stempel mit Fläche B angeschlossen ist. Dann wirkt den Stempel eine Kraft

$$F = p \cdot B.$$

Wenn sich der Stempel nun ein Stück Δx bewegt, wird von dem Gas eine Arbeit

$$\Delta A = F \cdot \Delta x = p \cdot B \cdot \Delta x = p \cdot \Delta V$$

verrichtet, wobei $\Delta V = B \cdot \Delta x$ die entsprechende Änderung des Volumens ist (siehe Abbildung 4.6). Mit dem Volumen ändert sich auch der Druck, was als Funktion $p = p(V)$ gegeben sei. Die gesamte Arbeit kann so als Summe über mehrere Teile berechnet werden, also $\sum_{i=1}^{n} p(V_i)\Delta V$, wobei für den exakten Wert der Grenzübergang $n \to \infty$ bzw. $\Delta V \to 0$ gemacht werden muss. So erhält man

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV.$$

Beispiel 4.2.5. Berechne die Arbeit eines idealen Gases bei der Ausdehnung vom Volumen V_1 auf V_2. Es gilt $p = \frac{nRT}{V}$, wobei n die Molanzahl, R die Gaskonstante und T die Temperatur bezeichne. Somit folgt

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\, dV = nRT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = nRT(\ln V_2 - \ln V_1) = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

4.2.3. Bogenlänge

Die Bogenlänge des Graphen einer beliebigen Funktion f kann man approximieren, indem man die Kurve in kleine Teile mit Breite Δx unterteilt und jeweils durch ein Dreieck annähert (siehe Abbildung 4.7). Die Höhe eines solchen Dreiecks kann wiederum mit Hilfe der Ableitung f' (= Steigung) berechnet werden und ist einfach $f'(x) \cdot \Delta x$. Die Hypothenusenlänge des Dreiecks ist somit $\sqrt{\Delta x^2 + (f'(x)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \Delta x$, daher ist die gesamte Bogenlänge

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \cdot \Delta x.$$

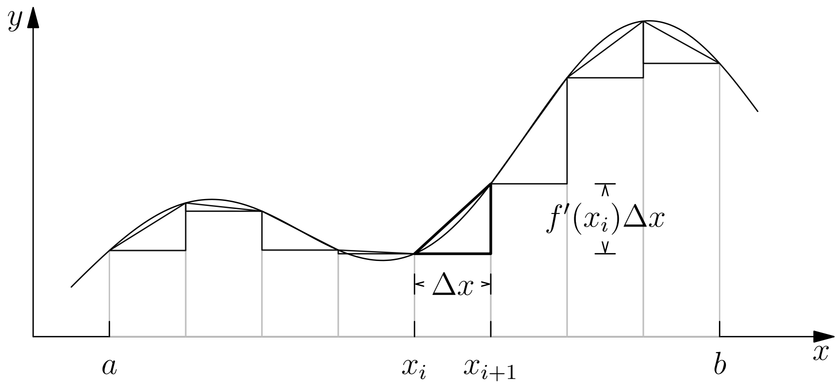


Abbildung 4.7.: Bogenlänge

Macht man nun den Grenzübergang $n \to \infty$ bzw. $\Delta x \to 0$, erhält man das Integral

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{4.1}$$

Beispiel 4.2.6 (Länge des Viertelkreises). Der Vierteleinheitskreises kann als Funktion

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

gesehen werden. Deren Ableitung ist

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Bogenlänge ist gemäß (4.1) somit

$$L(0, 1) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

(Daraus folgt die bekannte Formel $u = 2\pi r$ für den Umfang eines Kreises mit Radius r.)

4.3. Mehrfachintegrale

4.3.1. Definition und Beispiele

Das bestimmte Integral einer Funktion f in einer Variablen wurde definiert als der Grenzwert der Summe

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

mit $n \to \infty$ bzw. $\Delta x \to 0$.

Dieses Konzept kann nun auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden: Der (höherdimensionale) Integrationsbereich B wird wieder in kleine Teile aufgeteilt und die Summe über alle Teile nach dem Grenzübergang für ihre Feinheit gegen 0 berechnet (siehe Abbildung 4.8). Das Mehrfachintegral einer Funktion in zwei Variablen ist somit

$$\iint_B f(x,y)\,dA := \lim\lim \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\,\Delta x \Delta y,$$

wobei der Grenzwert für die Feinheit der Unterteilung gegen 0 genommen wird. Dabei wird statt dem *Linienelement* dx das *Flächenelement* dA ($= dx\,dy$ in kartesischen Koordinaten) für Funktionen in zwei Variablen und das Volumselement dV ($= dx\,dy\,dz$ in kartesischen Koordinaten) bei drei Variablen verwendet, usw. Die x_i, y_i stellen eine (immer „feiner“ werdende) Unterteilung des Bereichs B dar.

Beispiele 4.3.1. Unter anderen sind folgende Berechnungen über Mehrfachintegrale möglich:

- *Volumen* des Bereichs B:
$$V = \iiint_B 1\,dV.$$
- *Masse* von B bei Dichte $\rho(x,y,z)$:
$$M = \iiint_B \rho(x,y,z)\,dV.$$
- *Schwerpunkt* $S = (x_s, y_s)$ eines Bereichs B mit Dichte $\rho(x,y)$:
$$x_s = \frac{\iint_B x\cdot\rho\,dA}{\iint_B \rho\,dA},$$
$$y_s = \frac{\iint_B y\cdot\rho\,dA}{\iint_B \rho\,dA}.$$
- *Trägheitsmoment* bei Dichte $\rho(r)$, wobei r die Entfernung eines Punktes zur Rotationsachse ist:
$$I = \iiint_B r^2\rho\,dV.$$

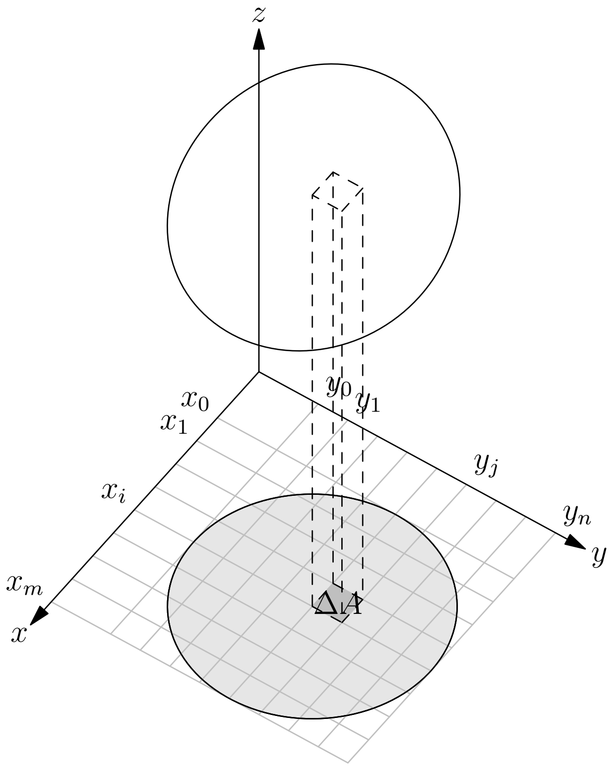


Abbildung 4.8.: Mehrfachintegral

4.3.2. Normalbereiche und Satz von Fubini

Definition 4.3.2 (Normalbereich). Sei B ein zweidimensionaler Bereich.

1. Wenn B als

$$\begin{gathered} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{gathered}$$

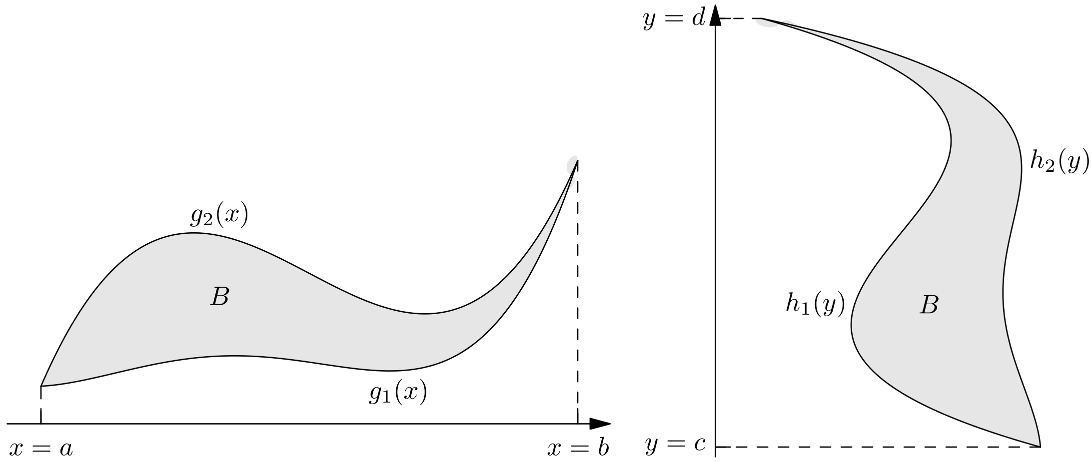
   mit Konstanten a, b und stetigen Funktionen g_1, g_2 geschrieben werden kann, spricht man von einem *Normalbereich bezüglich* x.

2. Wenn B als

$$\begin{gathered} c \le y \le d \\ h_1(y) \le x \le h_2(y) \end{gathered}$$

   mit Konstanten c, d und stetigen Funktionen h_1, h_2 geschrieben werden kann, spricht man von einem *Normalbereich bezüglich* y.

(Siehe Abbildung 4.9.)



(a) Normalbereich bzgl. x (b) Normalbereich bzgl. y

Abbildung 4.9.: Normalbereiche.

Bemerkung 4.3.3. Für einen Normalbereich bzgl. x gilt also Folgendes: Wenn man in y-Richtung an einer beliebigen Stelle x in den Bereich „hineinsticht“, ergibt sich genau ein „Eintritts“- und ein „Austrittspunkt“ (nämlich genau an den y-Koordinaten $g_1(x)$ und $g_2(x)$). Die Funktion $g_1(x)$ gibt die untere Grenze des Bereichs an, $g_2(x)$ die obere.

Entsprechendes gilt für einen Normalbereich bzgl y. Hier ist $h_1(y)$ die linke Grenze, $h_2(x)$ die rechte.

Bemerkung 4.3.4. Die Definition von Normalbereichen kann entsprechend auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.

Mehrfachintegrale über Normalbereiche können gemäß folgendem Satz mittels mehrerer Einfachintegrale berechnet werden:

Satz 4.3 (Satz von Fubini). Sei B ein Normalbereich bzgl. x. Dann gilt für das Mehrfachintegral einer Funktion $f(x, y)$ über dem Bereich B

$$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Entsprechend gilt bei einem Normalbereich bzgl. y

$$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Bemerkung 4.3.5. Bei den einzelnen Integralen im Satz von Fubini handelt es sich um gewöhnliche Einfachintegrale, die schrittweise (von innen nach außen) nach den bekannten Integrationsregeln berechnet werden können.

Bemerkung 4.3.6. Nicht-Normalbereiche kann man gegebenenfalls in mehrere Normalbereiche zerteilen.

Beispiel 4.3.7. Berechne das Integral der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

über dem Bereich B, der von der Parabel $y = x^2$, der Hyperbel $y = \frac{32}{x}$, den Geraden $y = 2x$ und $x = 8$ und der x-Achse begrenzt wird (siehe Abbildung 4.10).

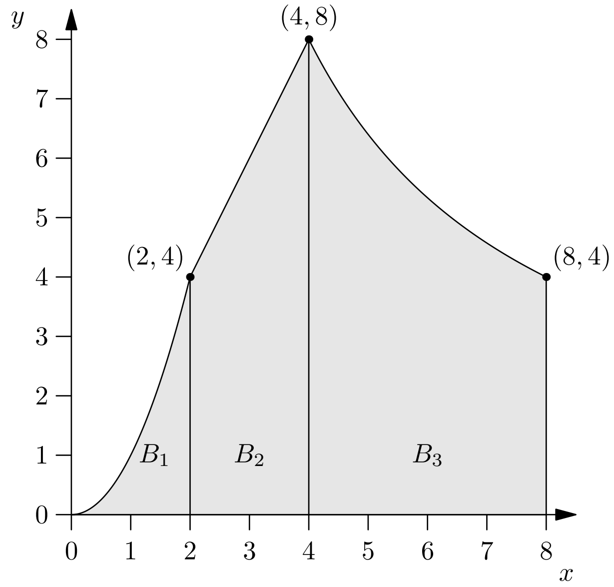


Abbildung 4.10.: Integrationsbereich aus Beispiel 4.3.7

Um das entsprechende Integral berechnen zu können, spalten wir zunächst den Bereich gemäß der Begrenzungsfunktionen in drei einzelne Bereiche B_1, B_2, B_3 auf, wie in der Abbildung ersichtlich:

$$\iint_B f(x, y)\ dx\ dy = \underbrace{\iint_{B_1} xy\ dx\ dy}_{=:I_1} + \underbrace{\iint_{B_2} xy\ dx\ dy}_{=:I_2} + \underbrace{\iint_{B_3} xy\ dx\ dy}_{=:I_3}.$$

Es handelt sich um drei Normalbereiche bzgl. x, wir können also jeweils den Satz von

Fubini anwenden und erhalten

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{x^2} xy \; dy \; dx = \int_{x=0}^{2} x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{x^2} \; dx = \int_{x=0}^{2} \frac{x^5}{2} \; dx = \frac{x^6}{12} \Big|_0^2 = \frac{2^6}{12} = \frac{16}{3}, \\
I_2 &= \int_{x=2}^{4} \int_{y=0}^{2x} xy \; dy \; dx = \int_{x=2}^{4} x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{2x} \; dx = \int_{x=2}^{4} 2x^3 \; dx = \frac{x^4}{2} \Big|_2^4 = 128 - 8 = 120, \\
I_3 &= \int_{x=4}^{8} \int_{y=0}^{32/x} xy \; dy \; dx = \int_{x=4}^{8} x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{32/x} \; dx = \int_{x=4}^{8} \frac{512}{x} \; dx \\
&= 512 \ln x \Big|_4^8 = 512(\ln 8 - \ln 4) = 512 \ln 2.
\end{aligned}
$$

Durch Summieren erhalten wir so das gesuchte Integral

$$
\iint_B f(x,y) \; dx \; dy = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{16}{3} + 120 + 512 \ln 2 = \frac{376}{3} + 512 \ln 2.
$$

A. Formelsammlung

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

- der Form $x^2 + px + q = 0$:
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
- der Form $ax^2 + bx + q = 0$:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Satz von Vieta Für die Lösungen α_1, α_2 von $x^2 + px + q = 0$ gilt

$$\begin{aligned} p &= -\alpha_1 - \alpha_2, \\ q &= \alpha_1 \alpha_2, \end{aligned}$$

und es folgt die Faktorisierung

$$x^2 + px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

mit

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

Speziell

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && (n = 2), \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 && (n = 3). \end{aligned}$$

Zerlegung von Differenzen n-ter Potenzen

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Speziell

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) && (n = 2), \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) && (n = 3). \end{aligned}$$

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \qquad \log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$$

Hyperbel- und Areafunktionen

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Trigonometrische Funktionen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Additionstheoreme

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Doppelwinkelfunktionen

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

2. Additionstheoreme

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Polarkoordinaten

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi := \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{falls } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{falls } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & \text{falls } x < 0, y < 0 \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{falls } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

bzw.

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

Produkt komplexer Zahlen in Polarkoordinaten

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) = rs\,(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

Formel von de Moivre

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Wurzeln aus komplexen Zahlen Sei $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau n komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ mit $z_j^n = w$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \\ z_2 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ z_3 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right)\right) \\ &\vdots \\ z_n &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Differentiationsregeln

$$\begin{aligned} \text{Linearität:} &\qquad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \\ \text{Produktregel:} &\qquad (fg)' = f'g + fg' \\ \text{Quotientenregel:} &\qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ \text{Kettenregel:} &\qquad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g', \\ \text{Umkehrfunktion:} &\qquad \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \end{aligned}$$

Ableitungstabelle In der folgenden Tabelle seien a, c, n Konstanten mit $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{x^2+1}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Zweidimensionale Kettenregel

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{r} \qquad \text{bei Richtung } \vec{r} \text{ mit } \|\vec{r}\| = 1$$

Regel von de L'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Taylor-Polynom

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \end{aligned}$$

Taylor-Entwicklungen

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\cos(x) &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots \\
\sin(x) &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \\
\exp(iy) &= \cos(y) + i\sin(y) \\
\cosh(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
\sinh(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\
\ln(1+x) &= \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \qquad \text{für } -1 < x \leq -1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{für } |x| < 1
\end{aligned}$$

mit

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich
2. Nullstellen: $f(x) = 0$
3. Extremwerte: $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$ (Minimum) bzw. $f''(x) < 0$ (Maximum) und Randuntersuchung
4. Monotonie: $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$
5. Wendepunkte: $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$
6. Krümmung: $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$
7. Verhalten am Rand des Definitionsbereichs: Grenzwertberechnung

(Details siehe Abschnitt 3.6)

Integrationsregeln

$$\int (f(x)+g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int \lambda f(x)\ dx = \lambda \int f(x)\ dx \qquad (\lambda \text{ konstant})$$

Stammfunktionen In der folgenden Tabelle seien a, c, n von x unabhängige Konstanten mit $a>0$, $n\in\mathbb{N}$.

$f(x)$	$F(x)$
c	cx
x^n mit $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln \lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\log_a x$	$\frac{x\ln x - x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\ln \lvert\sin x\rvert$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\frac{x^2}{x^2+1}$	$x - \arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln \lvert\cosh x\rvert$
$\coth x$	$\ln \lvert\sinh x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ mit $x>1$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{1}{1-x^2}$ mit $\lvert x\rvert<1$	$\operatorname{artanh} x$
$\frac{1}{1-x^2}$ mit $\lvert x\rvert>1$	$\operatorname{arcoth} x$

Sätzeverzeichnis

Abbildungsverzeichnis