Mathematik I M WM Übungen 6. Übungsblatt

44. Zeigen Sie, dass die rekursiv gegebene Folge
$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$
konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert!

45. Man gebe, falls möglich, stetige Ergänzungen der folgenden Funktionen in den jeweils angegebenen Punkten an:
(a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2+5}}, \quad \xi = \pm 2$ (b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{(x-1)^2}, \quad \xi = 1$

46. Man untersuche, ob die folgenden Grenzwerte von Funktionen existieren und bestimme sie im Fall der Existenz:
(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2-1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}+1}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+a} - \sqrt{\frac{1}{x}+1}\right)$, $a > 1$

47. Für welche Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?
$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{falls } x \leq 1 \\ ax - x^3 & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \\ bx^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

48. Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen:
(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt{n^3+7}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n^2}$

49. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:
(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n (n+17)}{(2n)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{\frac{5}{2} - (-1)^k k}$
(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+7}}$. (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+28n+11}{20n^2+6n+\sin(n\sqrt{\pi})}$

50. Zeigen Sie mit dem Verdichtungssatz, dass die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$$
konvergiert falls $\alpha > 1$, und divergiert falls $\alpha \leq 1$.

51. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:
(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{4k}{3k}}$

52. Für welche a konvergiert die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k-1}}$$
und wie groß ist die jeweilige Summe?