Mathematik I M WM Übungen 5. Übungsblatt

37. Die Folge a_n sei rekursiv durch $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + a_n^2}$ gegeben. Man zeige, dass diese Folge einen Grenzwert hat und bestimme seinen Wert!

38. Untersuchen Sie die folgende rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert
$$a_1 = 0; \qquad a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n}.$$

39. Bestimmen Sie soweit möglich den Grenzwert der folgendermaßen gegebenen Folgen (a_n), $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\dfrac{n^2}{4^n}$

   (b) $\cos(n\pi)$

   (c) $(-i)^n$

   (d) $\left(\dfrac{1-i}{1+\sqrt{2}i}\right)^n$

   (e) $\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}\binom{n}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{n\pi}{2}$

40. Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert an:

   (a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)(3n^2+1)}$

   (b) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$

   (c) $a_n = (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

   (d) $a_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$

   (e) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n+5}$

41. Zeigen Sie:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+1} = 1$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3(3^n+5)} = 3$

42. Berechnen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen:

   (a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^{n+(-1)^n n}}$

   (b) $a_n = \frac{1}{3^{n/2}} \cos n\pi + i \cdot (-1)^n \frac{n+2}{n-3}$

43. Ist die Folge $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergent?