Mathematik I M WM Übungen 3. Übungsblatt

20. Beweisen Sie für alle $n, k \in \mathbb{N}$:
$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}.$$

21. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

22. Gegeben sei das Dreieck ABC mit
$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$
   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks!
   (b) Das Dreieck bildet die Grundfläche einer Pyramide, deren Volumen $V = 75$ sein soll. Welche Koordinaten kommen für die Spitze S der Pyramide in Frage?

23. Gegeben sind die Punkte
$$A = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass ABC ein rechtwinkeliges Dreieck bildet.
   (b) Bestimmen Sie die Winkelsymmetrale w des rechten Winkels und geben Sie den Schnittpunkt S von w mit der Hypotenuse an. In welchem Verhältnis wird die Hypotenuse von S geteilt?
   (c) Welchen Abstand hat P von der Ebene E, die durch das Dreieck ABC definiert wird?
   (d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden
$$g : X = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
   (e) In welchem Winkel schneidet die Gerade g die Ebene E?

24. Gegeben sind die Geraden
$$g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
und
$$h : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Geraden und die jeweiligen Fußpunkte!

25. Stellen Sie fest, welche Kegelschnitte durch folgende Gleichungen gegeben werden und bestimmen Sie die Brennpunkte!
   (a) $9x^2 - 3x - 4y^2 + 6y = 14$
   (b) $32x^2 - 32x + 64y^2 + 16y = 7$
   (c) $x^2 - 8x + y^2 = -4(y+1)$