

## Mathematik I M WM Übungen 3. Übungsblatt

20. Beweisen Sie für alle  $n, k \in \mathbb{N}$ :

$$(n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k}.$$

21. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

22. Gegeben sei das Dreieck  $ABC$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks!
- Das Dreieck bildet die Grundfläche einer Pyramide, deren Volumen  $V = 75$  sein soll. Welche Koordinaten kommen für die Spitze  $S$  der Pyramide in Frage?

23. Gegeben sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass  $ABC$  ein rechtwinkeliges Dreieck bildet.
- Bestimmen Sie die Winkelsymmetrale  $w$  des rechten Winkels und geben Sie den Schnittpunkt  $S$  von  $w$  mit der Hypotenuse an. In welchem Verhältnis wird die Hypotenuse von  $S$  geteilt?
- Welchen Abstand hat  $P$  von der Ebene  $E$ , die durch das Dreieck  $ABC$  definiert wird?
- Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene  $E$  mit der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- In welchem Winkel schneidet die Gerade  $g$  die Ebene  $E$ ?

24. Gegeben sind die Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$h : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Geraden und die jeweiligen Fußpunkte!

25. Stellen Sie fest, welche Kegelschnitte durch folgende Gleichungen gegeben werden und bestimmen Sie die Brennpunkte!

- $9x^2 - 3x - 4y^2 + 6y = 14$
- $32x^2 - 32x + 64y^2 + 16y = 7$
- $x^2 - 8x + y^2 = -4(y + 1)$