Mathematik I M WM Übungen 2. Übungsblatt

10. Formulieren Sie die folgenden Aussagen und deren Verneinung in formaler Schreibweise unter Verwendung von Quantoren:

    (a) Zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl.

    (b) Es gibt eine kleinste positive reelle Zahl.

11. Formalisieren Sie die folgenden Sätze und verneinen Sie sie!

    (a) Alle Studenten, die fleißig lernen, erhalten ein positives Zeugnis

    (b) Wenn alle Menschen friedlich zu einander sind, dann gibt es keine Kriege.

12. Lösen Sie die Gleichung $z^2 - (5+5i)z + 2 + 11i = 0$ über den komplexen Zahlen!

13. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$

14. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die den folgenden Ungleichungen genügen

$$|z-1| \leq |z+i| \leq |z+1|$$

    und skizzieren Sie das Ergebnis in der Gauß'schen Zahlenebene!

15. Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D in $\mathbb{R}$ und die Wertemenge der Funktion. Ist die Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv? Bestimmen Sie die Umkehrabbildung (falls möglich) mit geeignetem Wertebereich.

16. Es sei $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = (x-1)^2 + 4$. Berechnen Sie $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ und f/g sowie die Verknüpfung $f \circ g$ und $g \circ f$.

17. Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum (falls möglich) der nachfolgenden Mengen reeller Zahlen. Sind diese auch Maxima und Minima?

    (a) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = 2 - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

    (b) $\{x \in \mathbb{R} : x = 3^n\}$

18. Gegeben sind die vier Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 22 \end{pmatrix}$$

    Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch P_2, P_3 und P_4 in paramterfreier Form und berechnen Sie den Abstand des Punktes P_1 von dieser Ebene. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks $P_2P_3P_4$

19. Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

sowie die Ebene F durch den Punkt

$$R = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix},$$

und durch die Gerade

$$g : X = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die beiden Ebenen E und F paramterfrei an!

(b) In welchem Punkt durchstößt die Gerade g die Ebene E?

(c) Wie lautet die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E und F?