Mathematik I M WM Übungen 1. Übungsblatt

1. Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig? Geben Sie für wahre Aussagen einen Beweis und zu falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an!

   (a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

   (b) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

   (c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

2. Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Bestimmen Sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times A$ und $(A \times B) \setminus (B \times B)$!

3. Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ gilt
$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|} \quad ?$$

4. Lösen Sie folgende Gleichungen über den komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil der Lösung an.

   (a) $\dfrac{(1+2i)z+9}{(3+4i)z-(9+4i)} = 8-5i$,

   (b) $z^2 = 3-4i$,

   (c) $z^2 - 7z + (13-i) = 0$.

5. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \in \mathbb{C}$, sowie z^2 und $|z|^2$:

   (a) $\dfrac{1-i}{1-2i} z = \dfrac{2+2i}{1+3i}$

   (b) $\left(\dfrac{1-i}{2+3i} - \dfrac{6+2i}{1+i}\right) z = \dfrac{3-i}{3+i}$

6. Untersuchen Sie, welche Teilmenge von $\mathbb{C}$ durch
$$\left|\frac{z-1-i}{z-2}\right| = 1$$
festgelegt wird und stellen Sie sie graphisch in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

7. Ermitteln Sie jene Punktmenge in $\mathbb{C}$, die durch die Ungleichungen
$$z\bar{z} < 3(z+\bar{z}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} z > 0$$
festgelegt wird und stellen Sie sie graphisch in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

8. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{n}{6n+4}$$

9. Beweisen Sie, dass $(-1)^{n+1} + 2^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von 5 ist.