1. a. Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$z\overline{z} + 3z = -3\overline{z} \qquad \text{und} \qquad Re(z) \leq Im(z)$$

Lösung. Setze $z = a + bi$, daraus folgt $\overline{z} = a - bi$. Setze dies ein:

$$\begin{aligned} z\overline{z} + 3z &= -3\overline{z} \\ (a+bi)(a-bi) + 3(a+bi) &= -3(a-bi) \\ a^2 + b^2 + 3a + 3bi &= -3a + 3bi \qquad \Big/ (-3bi + 3a) \\ a^2 + b^2 + 6a &= 0 \\ a^2 + 6a + 9 - 9 + b^2 &= 0 \qquad \Big/ (+9) \\ (a+3)^2 + b^2 &= 9 \end{aligned}$$

Dies ist eine Kreisgleichung mit Mittelpunkt $(-3, 0)$ und Radius 3. Alle Punkte auf diesem Kreis erfüllen die erste Bedingung. Die zweite Bedingung, $Re(z) \leq Im(z)$ wird von allen Punkten oberhalb der Gerade $y = x$ erfüllt. <Skizze>

b. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$(1-i)z^2 - 3z - 5iz - 16 + 2i = 0$$

Lösung. Verwende große Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1-i)z^2 + (-3-5i)z + (-16+2i) &= 0 \\ z_{1,2} &= \frac{-(-3-5i) \pm \sqrt{(-3-5i)^2 - 4(1-i)(-16+2i)}}{2(1-i)} \\ &= \frac{3+5i \pm \sqrt{9+30i-25+56-72i}}{2-2i} \\ &= \frac{3+5i \pm \sqrt{40-42i}}{2-2i} \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $\sqrt{40-42i} =?$ Suche $z = a+bi$, sodass $z = \sqrt{40-42i}$.

$$\begin{aligned} a + bi = z &= \sqrt{40-42i} \qquad \Big/^{2} \\ (a+bi)^2 = z^2 &= 40 - 42i \\ a^2 - b^2 + 2abi &= 40 - 42i \end{aligned}$$

Verwende Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 40 \\ 2ab &= -42 \end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ergibt: $\sqrt{40-42i} = 7 - 3i$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{3+5i \pm \sqrt{40-42i}}{2-2i} \\ &= \frac{3+5i \pm (7-3i)}{2-2i} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der zwei Lösungen erweitere man nun mit $(2+2i)$:

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{3+5i \pm (7-3i)}{2-2i} \\
&= \frac{3+5i \pm (7-3i)}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} \\
&= \frac{(3+5i \pm (7-3i))(2+2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\
&= \frac{(3+5i \pm (7-3i))(2+2i)}{4+4} \\
z_1 &= \frac{(3+5i + (7-3i))(2+2i)}{8} \\
&= \frac{(10+2i)(2+2i)}{8} \\
&= \frac{20+4i+20i-4}{8} \\
&= \frac{16+24i}{8} \\
&= 2+3i \\
z_2 &= \ldots \qquad \text{analog}
\end{aligned}$$

2. Die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

definieren eine Ebene E.

a. Geben Sie die Ebene parameterfrei an.

Lösung. Zwei Richtungsvektoren der Ebene sind: $\vec{a} = \vec{AB} = B - A = (-4/1/1)$ und $\vec{b} = \vec{AC} = C - A = (4/3/-5)$. Ein Normalvektor auf die Ebene ist nun das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren: $\vec{a} \times \vec{b} = (-8/-16/-16) \parallel (1/2/2)$

Die Ebene hat damit die Form $x + 2y + 2z = d$. Um d auszurechnen setzt man den Punkt A in die Gleichung ein: $0 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = d \Leftrightarrow d = -2$. Damit gilt: $E : x + 2y + 2z = -2$.

b. Welche Punkte auf der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

haben von der Ebene E den Abstand 3?

Lösung. Nach Hesse'scher Abstandsformel soll gelten:

$$\left| \frac{x + 2y + 2z + 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = 3.$$

Aus der Geradengleichung bekommt man $x = 3 + t$, $y = 3 + t$ und $z = 8 + 3t$. Nach Einsetzen ergibt das:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{3 + t + 2(3 + t) + 2(8 + 3t) + 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| &= 3 \\
\left| \frac{27 + 9t}{3} \right| &= 3 \\
|9 + 3t| &= 3 \\
|3 + t| &= 1
\end{aligned}$$

Das ergibt die beiden Fälle $3 + t = 1 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow S_1 = (1/1/2)$ und $3 + t = -1 \Leftrightarrow t = -4 \rightarrow S_2 = (-1/-1/-4)$.

3. a. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2\binom{n}{2}} + \frac{2}{\sqrt{n^3}} \sin^3\left(\frac{3n^2}{\pi}\right)$$

Lösung. Betrachte die beiden Teile einzeln.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{2\binom{n}{2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{2\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{n(n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - n} \qquad \Big/ \cdot \frac{n^2}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{n}{n^2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Für die zweite Seite gilt: Der $\sin(x)$ eines beliebigen Wertes x liegt immer zwischen -1 und 1, demzufolge ebenso $\sin^3(x)$. Daraus folgt:

$$\frac{2}{\sqrt{n^3}} \cdot (-1) \leq \frac{2}{\sqrt{n^3}} \sin^3\left(\frac{3n^2}{\pi}\right) \leq \frac{2}{\sqrt{n^3}} \cdot 1$$

Linke und rechte Seite gehen jeweils gegen 0 und somit laut Sandwichsatz auch der mittlere Term. Die Summe aus erstem und zweitem Teil geht daher gegen 1.

b. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2 + (-1)^n n}{3}}$$

Lösung. Es gilt:

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{3}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^2-n}{3}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^2+(-1)^n n}{3}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^2+n}{3}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^2+n^2}{3}}$$

Betrachte rechten und linken Teil:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{3}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3}} \\ &= \frac{1\cdot 1}{1} = 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+n^2}{3}} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^2}{3}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n} \\ &= 1\cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Laut Sandwichsatz konvergiert a_n demnach gegen 1.

4. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x) + \cot(x) - (1+\sqrt{2})\cos(x) = 0$$

Lösung.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x) + \cot(x) - (1+\sqrt{2})\cos(x) &= 0 \qquad \Big/ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\texttt{und}\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}2\sin(x)\cos(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - (1+\sqrt{2})\cos(x) &= 0 \qquad \Big/ \cdot\sin(x) \\ \cos(x)\cdot\Big(\sqrt{2}\sin^2(x) + 1 - (1+\sqrt{2})\sin(x)\Big) &= 0\end{aligned}$$

Lösen der quadratischen Gleichung in $\sin(x)$ mit großer Lösungsformel:

$$\sin(x) = \frac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}\pm(1-\sqrt{2})}{4}$$

Damit wird die Gleichung nach Satz von Vieta zu: $\cos(x)\cdot(\sin(x)-\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(\sin(x)-1) = 0$. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oder $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.