Kombinatorische Optimierung Übungsbeispiele WS 2009/10

40. Zeigen Sie: Jede $(k+1) \times (n-k)$ Untermatrix einer $n \times n$ Permutationsmatrix enthält mindestens einen 1-Eintrag.
    Bemerkung: Eine Permutationsmatrix ist eine Matrix A mit Einträgen $a_{i,j} \in \{0,1\}$ und enthält in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen 1-Eintrag.

41. Zeigen Sie: Sei $r \geq 1$ und $G = (A \cup B, E)$ ein r-regulärer bipartiter Graph. Dann lässt sich die Kantenmenge E in r disjunkte perfekte Matchings partitionieren.

42. Lösen Sie das Schedulingproblem aus der Vorlesung. Dabei sind drei Jobs auf vier Maschinen zu bearbeiten wobei die Bearbeitungszeiten $p_{i,j}$ in folgender Matrix gegeben sind:
$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

43. Beweisen Sie: Sei $G = (A \cup B, E)$ ein bipartiter Graph, dann gilt
$$\max\{|M| : M \text{ ist ein Matching in } G\} = |A| - \max\{|X| - |N(X)| : X \subseteq A\}$$

44. Hat jeder 3-reguläre Graph ein perfektes Matching?

45. Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (U \cup V, E)$ mit $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ und $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ durch
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
    wobei $\{u_i, v_j\} \in E \iff a_{i,j} = 1$. Geben Sie ein Matching mit maximaler Kardinalität an. Verwenden Sie dieses Matching um eine minimale Kontenüberdeckung zu finden!

46. Das Spiel Slither von Anderson für zwei Spieler geht folgendermaßen: Gegeben ist ein ungerichteter, zusammenhängender und einfacher Graph G. Die Spieler wählen abwechselnd eine Kante e nach folgenden Regeln aus: e wurde noch nicht ausgewählt und die Menge der ausgewählten Kanten inklusive e bilden einen Weg. Verloren hat der Spieler, der keine Kante mehr auswählen kann.
    Zeige: Wenn G ein perfektes Matching besitzt, dann existiert für den ersten Spieler eine sichere Gewinnstrategie.

47. Finden sie für den Graphen in Abbildung 12 algorithmisch ein Matching maximaler Kardinalität und eine Menge S, die das Minimierungsproblem in der Tutte-Berge Formel löst.
    Beginnen Sie mit dem eingezeichneten Matching!

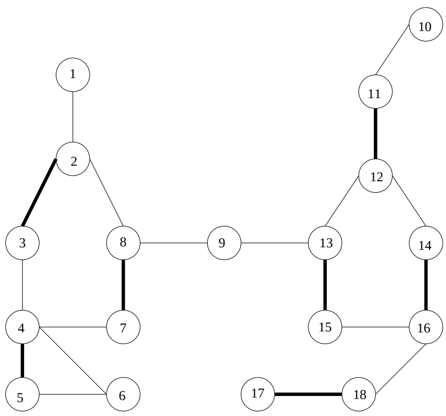

Abbildung 12: MKFP für Aufgabe 47